



فصلنامه علمی ((دفاع هوافضایی))

دوره ۱، شماره ۱، خرداد ۱۴۰۱

عنوان مقالات

مقاله پژوهشی

تعیین زاویه و سرعت اولیه پرتابه در سامانه‌های توپی بر اساس یک معادله پرتابه کسری با روش پرتابی

امیرحسین صالحی شایگان^۱، حسن نعناکار^۲

۱. مدرس گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران.

۲. استادیار گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پدافند هوایی خاتم‌الانبیاء (ص)، تهران، ایران.

چکیده

سامانه‌های جنگ‌افزارهای زمین به هوای توپی نقش بسیار مهمی در پدافند ارتفاع پست دارند. در فاز ابتدایی پرتاب در چنین سامانه‌هایی مهم‌ترین مسئله، یافتن زاویه و سرعت اولیه پرتابه است، به‌گونه‌ای که در کمترین زمان ممکن از نظر آئرودینامیکی پایدار و کنترل‌پذیر شده و از پرتابگر دور شود. تاکنون این دو مؤلفه بر اساس مدل‌سازی یک معادله با مشتقات معمولی محاسبه شده‌اند. اما در این مقاله ابتدا فاز پرتاب را بر اساس یک معادله پرتابه کسری که سازگاری بیشتری در عمل با طبیعت و ساختار پرتابه دارد، مدل‌سازی می‌کنیم. همچنین برخی از ویژگی‌های آن همانند مسیر حرکت، برد پرواز، زمان پرواز و بیشینه ارتفاع را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. سپس با نگرشی معکوس، به معادله پرتابی کسری می‌پردازیم، یعنی فرض می‌کنیم مکان پرتابه را در یک زمان به‌خصوص می‌دانیم و سپس زاویه و سرعت اولیه پرتابه را به دست می‌آوریم. برای این منظور از روش پرتابی استفاده می‌کنیم که یکی از روش‌های کارا در زمینه‌ی حل مسائل مقدار مرزی است. در پایان با یک مثال کاربردی، صحت نتایج به دست آمده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

اطلاعات مقاله

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۱۱

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۷/۱۵

کلمات کلیدی:

سامانه‌های توپی، ارتفاع پست، معادله پرتابه کسری، روش پرتابی (شوتینگ)، مسئله معکوس.



نویسنده مسئول:

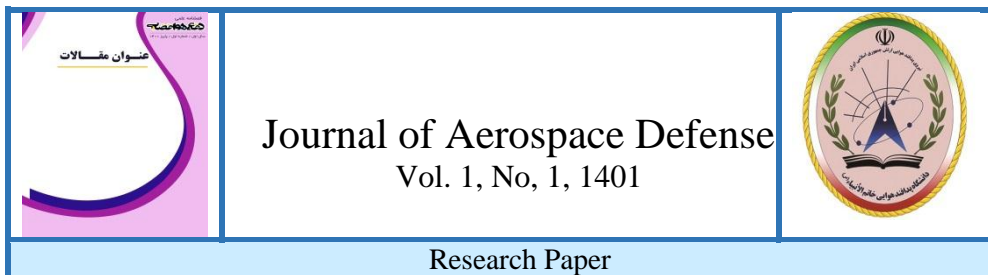
امیرحسین صالحی شایگان

ایمیل:

ahsalehi.kau@gmail.com

استناد به مقاله: امیرحسین صالحی شایگان، حسن نعناکار، تعیین زاویه و سرعت اولیه پرتابه در سامانه‌های توپی

بر اساس یک معادله پرتابه کسری با روش پرتابی، مجله علمی دفاع هوافضایی دوره ۱، شماره ۱، خرداد ۱۴۰۱.



Identification of Angle and the Initial Velocity in Artillery Weapons Based on a Fractional Differential Equation of the Projectile Motion by Using Shooting Method

Amir Hossein Salehi Shayegan¹ , Hassan Nanakar²

1. K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

2. Assistant Professor, Khatam Ol Anbia (PBU) University, Tehran, Iran.

Article Information

Accepted: 1400/07/15

Received: 1400/10/11

Keywords:

Artillery weapons, Fractional projectile equation, Shooting method (shooting), Inverse problem..



Corresponding author:

Amir Hossein Salehi Shayegan

Email:

ahsalehi.kau@gmail.com

Abstract

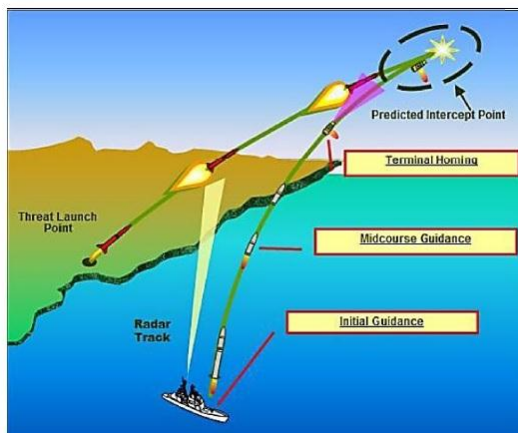
Artillery weapons have an important role in low height artilleries. In the first step of these weapons, due to reach a stable and controllable projectile, aerodynamically, finding angle and the initial velocity are very essential. Until now, scientists have obtained these items by modelling based on ordinary differential equations. But, in this paper, fractional differential equations of the projectile motion, which are very efficient in artillery weapons and more compatible with nature, are introduced. Then some of its properties such as trajectory, range, flight time and maximum height are studied. In addition, an inverse projectile motion is considered, i.e., we consider a problem that we know the position of motion in a special time and then we obtain angle and the initial velocity. In this way, the shooting method is applied. This method is an efficient and applicable method for solving boundary value problems. Finally, in order to study the efficiency and accuracy of the method a numerical example is given.

HOW TO CITE: Amir Hossein Salehi Shayegan, Hassan Nanakar, Identification of Angle and the Initial Velocity in Artillery Weapons Based on a Fractional Differential Equation of the Projectile Motion by Using Shooting Method, Journal of Airspace Defense. Vol. 1, No. 1, 1401.

۱. تعاریف و مفاهیم اولیه

یکی از مأموریت‌های مهم نیروی پدافند هوایی، درگیری با اهداف ارتفاع پست با سامانه‌های جنگ‌افزارهای زمین به هوای توپی می‌باشد. هدایت یک موشک پدافند هوایی شامل سه مرحله، پرتاب، میانی و نهایی است. در ادامه به توضیحاتی در مورد هر یک از این فازها پرداخته خواهد شد. نمونه‌ای از پرواز موشک پدافند هوایی در شکل ۱ نشان داده شده است.

فاز پرتاب: از جمله اهداف فاز پرتاب، زاویه و سرعت اولیه وسیله پرنده است، به گونه‌ای که در کمترین زمان ممکن از نظر آئرو دینامیکی پایدار و کنترل پذیر شده و از پرتابگر دور شود. در این فاز معمولاً یا موشک هدایت نمی‌شود و یا الگوریتم هدایت آن به صورت حلقه باز است. به طور مثال موشک‌های زمین به هوا از نوع مایل پرتاب معمولاً در فاز پرتاب (چند ثانیه اول پس از پرتاب) هدایت نمی‌شوند. همچنین در موشک‌های بالستیک و ماهواره‌بر، فرامین هدایتی مربوط به فاز پرتاب، قبل از پرواز به صورت تابعی از زمان محاسبه و در پردازنده هدایت ذخیره می‌شود.



شکل ۱: مراحل پرواز موشک زمین به هوا

فاز میانی: فاز میانی معمولاً طولانی‌ترین مرحله از پرواز است. هدف فاز میانی رساندن وسیله به نزدیکی هدف، حرکت روی یک مسیر بهینه به منظور کاهش اتلاف انرژی وسیله و گاهی مخفی نگه‌داشتن آن از دید دشمن است. هواپیماهای نظامی و وسایل بدون سرنشین، جهت مصون ماندن از سیستم‌های دفاعی دشمن باید در ارتفاع کم پرواز کنند. همچنین، این وسایل باید در کوتاه‌ترین زمان ممکن و با کمترین اتلاف انرژی به مقصد برسند. نمونه‌هایی از مصادیق فاز میانی در وسایل پرنده مختلف عبارتند از:

- ۱- دنبال کردن یا اجتناب از عوارض جغرافیایی توسط یک موشک کروز یا یک هواپیمای نظامی
- ۲- طی شدن یک مسیر بهینه توسط موشک‌های زمین به هوا پس از فاز پرتاب و قبل از فاز نهایی
- ۳- اوج‌گیری، کروز، نزول و گشت زنی یک هواپیمای تجاری
- ۴- انتقال از یک مدار به مدار دیگر در یک فضای پیمایش قبل از قرارگیری دقیق در مدار جدید

فاز نهایی: آخرین فاز پروازی هر وسیله پرنده فاز نهایی است. مهم ترین وظیفه فاز نهایی انجام کار با دقت قابل قبول است. به طور مثال برای یک موشک کروز، در انتهای مسیر هدف را جستجو کرده و به سمت آن شیرجه می‌زند.

در این مقاله، به دلیل اهمیت و همچنین در راستای یکی از مأموریت‌های مهم پدافند هوایی، فاز پرتاب مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرد. همان‌طور که اشاره شد در این فاز مهم‌ترین مسئله تعیین زاویه و سرعت اولیه پرتابه است. برای منظور از یک معادله پرتابه کسری که سازگاری بیشتری با مدل فاز پرتاب در عمل دارد، برای مدل‌سازی استفاده می‌کنیم. برای مدت‌ها از مشتقات معمولی برای مدل‌سازی پرتابه استفاده شده است. اما امروزه با مدل‌سازی بر اساس مشتقات کسری می‌توان مدل‌های واقعی‌تری ارائه دهیم به‌گونه‌ای که پرنده در کمترین زمان ممکن از نظر آئرو دینامیکی پایدار و کنترل پذیر شود.

حرکت پرتابه یکی از معروف ترین مسائل در فیزیک است و در قسمت‌های مختلف فیزیک نقش آفرینی می‌کند و نیازی به معرفی ندارد. محاسبات کسری نیز، با بیش از ۳۰۰ سال قدمت بیانگر تعمیمی از یک معادله دیفرانسیل معمولی به یک معادله دیفرانسیل با مرتبه دلخواه است. در دهه‌های گذشته، محاسبات کسری در زمینه‌های مختلف، از جمله فیزیک، مهندسی، زیست‌شناسی و بسیاری دیگر از علوم بکار گرفته شده و نتایج قابل توجهی نیز حاصل شده است [۱۲-۱]. اما تاکنون برای مدل‌سازی حرکت پرتابه استفاده نشده است. هدف از این مقاله ارائه یک تعمیم از مسئله پرتابه کلاسیک بر پایه‌ی روش‌های پرتابه کسری می‌باشد که از این به بعد به‌عنوان پرتابه کسری یاد می‌شود. برای این منظور به برخی تعاریف مقدماتی نیازمندیم که در ادامه مطرح می‌شود.

۱-۱. مشتق کسری کاپوتو

مشتق کسری کاپوتو یک تابع در مراجع [۱۳، ۱۴] به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (n-1 < \alpha < n).$$

تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو نیز به‌صورت زیر می‌باشد:

$$L \left\{ \frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} (x) \right\} = s^\alpha F(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{\alpha-m-1} f^{(m)}(0), \quad n-1 < \alpha < n.$$

۱-۲. تابع میتینگ لافلر

یک تابع دو پارامتری از نوع میتینگ لافلر توسط سری رابطه ذیل تعریف می‌شود:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\alpha m + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0,$$

تبدیل لاپلاس تابع میتینگ لافلر که در حل معادلات دیفرانسیل کسری بسیار سودمند است به‌صورت رابطه زیر است:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t^{\alpha m - \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(m)}(\pm at^\alpha) dt = \frac{m! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp a)^{m+1}}, \quad (\operatorname{Re}(s) > a^{\frac{1}{\alpha}}),$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$L^{-1} \left[\frac{m! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp a)^{m+1}} \right] = t^{\alpha m + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(m)}(\pm at^\alpha)$$

۲. فرمول بندی مسئله

حرکت پرتابی یک مسئله فیزیکی معروف است که شامل تعیین حرکت یک شی در فضا که تحت یک میدان گرانشی یکنواخت قرار گرفته است، می‌باشد. در این بخش، به‌طور خلاصه مقدمه‌ای از این مسئله را در نظر می‌گیریم که در آن، مقاومت هوا در برابر حرکت پرتابه در نظر گرفته نمی‌شود. این پرتابه به‌عنوان ذره‌ای به جرم m عمل می‌کند که تحت یک نیروی گرانشی است و هیچ نیروی کششی برای آن در نظر گرفته نمی‌شود [۱۴]. در این شرایط، معادلات کلاسیک حرکت، برای ذره‌ای در صفحه $x-y$ ، به‌صورت زیر:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$$

با شرایط اولیه:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & \dot{x}(0) &= v_0 \cos(\varphi), \\ y(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= v_0 \sin(\varphi). \end{aligned} \quad (1)$$

داده می‌شود. حال مسئله فوق را از دیدگاه کسری در نظر می‌گیریم. قبل از انجام این کار، یک سؤال مطرح می‌شود، چگونه شتاب ذره را می‌توان با رویکرد کسری بیان کرد؟ برای پاسخ، ابتدا به مقالات

[۱۳، ۱۴] اشاره می‌کنیم که پیشنهاد می‌کند تکانه تعمیم یافته از نوسان کسری توسط

$$p = m \frac{d^{\beta/2} x}{dt^{\beta/2}},$$

تعریف شود که در آن پارامتر m بعد جرم را همانند مسئله کلاسیک ندارد. بر این اساس، می‌توان قانون دوم نیوتون را با تعریف نیرویی که بر روی یک ذره در جهت x متمرکز شده است،

تعمیم داد، یعنی

$$\frac{3}{2} < 1 + \frac{\beta}{2} \leq 2, \quad f = \frac{dp}{dt} = m \frac{d^{1+\beta/2} x}{dt^{1+\beta/2}}$$

با این کار می‌توان نیرو را ساده کرد:

$$\frac{3}{2} < \alpha \leq 2, \quad f = m \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha}$$

عبارت است از:

(۲)

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = 0, \quad \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = -g, \quad \frac{3}{2} < \alpha \leq 2$$

از لحاظ فیزیکی، می‌توان مشتقات زمان x و y را به ترتیب به‌عنوان شتاب پرتابه در جهت افقی و عمودی در نظر گرفت که به شتاب در مکانیک کلاسیک در $2 \rightarrow \alpha$ کاهش می‌یابد. جواب معادله (۲) با استفاده از تبدیل لاپلاس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1} X(0) - s^{\alpha-2} \dot{X}(0) = 0,$$

$$s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} Y(0) - s^{\alpha-2} \dot{Y}(0) = -\frac{g}{s},$$

که با استفاده از شرایط اولیه (۱)، خواهیم داشت:

$$X(s) = \frac{v_0 \cos(\varphi)}{s^2}, \quad Y(s) = -\frac{g}{s^{\alpha+1}} + \frac{v_0 \sin(\varphi)}{s^2}$$

بنابراین

$$x(t) = v_0 \cos(\varphi) t, \quad y(t) = -\frac{g t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + v_0 \sin(\varphi) t \quad (3)$$

۳. ویژگی‌های حرکت پرتابی در حساب دیفرانسیل کسری

سه مقیاس برای شناسایی، تشخیص و تجزیه و تحلیل مسیرها موجود است؛ برد پرتاب، حداکثر ارتفاع و زمان پرواز. برد، فاصله افقی است از زمان پرتاب آن تا زمانی که به زمین فرود می‌آید. حداکثر ارتفاع، ارتفاع بالاترین نقطه در مسیر است. زمان پرواز، مقدار زمانی است که پرتابه در هنگام پرواز می‌پیماید و به زمین فرود می‌آید. در این بخش این موارد را بررسی می‌کنیم.

۳-۱. مسیر (خط سیر)

با حذف t از معادله (۳)، مسیر پرتابه کسری به ازای α دلخواه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = x \tan(\varphi) - \frac{g x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)(v_0 \cos(\varphi))^2}$$

زمانی که $2 \rightarrow \alpha$ ، معادله (۴) به معادله مسیر کلاسیک تبدیل می‌شود:

$$y = x \tan(\varphi) - \frac{g}{2v_0^2} \sec^2(\varphi) x^2$$

۳-۲. برد پرتاب

برد پرتابه کسری R_F به‌عنوان مقدار x در نقطه ضربه تعریف می‌شود. بنابراین، اگر در رابطه (۴)، $y = 0$ را قرار دهیم نتیجه می‌دهد $x = R_F$. لذا، عبارت است:

$$R_F = (v_0)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} (\sin(\varphi))^{\frac{1}{\alpha-1}} \cos(\varphi) \quad (5)$$

زمانی که $2 \rightarrow \alpha$ ، معادله (۵) به محدوده پرتاب کلاسیک R_C تبدیل می‌شود:

$$R_C = \frac{2v_0^2}{g} \sin(\varphi) \cos(\varphi)$$

۳-۳. زمان پرواز

زمان کسری پرواز $t_{F\text{-flight}}$ به عنوان مقدار t تعریف می شود، که پرتابه به زمین می رسد. بنابراین، با قرار دادن $y = 0$ ، $t = t_{F\text{-flight}}$ عبارت است از:

$$t_{F\text{-flight}} = \left[\frac{\Gamma(\alpha + 1) v_0 \sin(\varphi)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (6)$$

در اینجا نیز باید اشاره کرد که زمان پرواز کلاسیک $t_{C\text{-flight}}$ پرواز را می توان از معادله (۶) زمانی که $\alpha \rightarrow 2$ ، به صورت زیر به دست آورد:

$$t_{C\text{-flight}} = \frac{2v_0 \sin(\varphi)}{g}$$

۳-۴. بیشینه ارتفاع

پرتابه حداکثر ارتفاع خود را هنگامی که مؤلفه عمودی سرعت آن صفر شود، یعنی $\dot{y} = 0$ به دست می آورد. لذا با حل این معادله به ازای t ، خواهیم داشت:

$$t_{\text{maximum height}} = \left[\frac{\Gamma(\alpha) v_0 \sin(\varphi)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (7)$$

قرار دادن (۷) در $y(t)$ در معادله (۳)، حداکثر ارتفاع H_F را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$H_F = \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \left[\frac{\Gamma(\alpha)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} (v_0 \sin(\varphi))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

در اینجا نیز می توانیم حداکثر ارتفاع پرتابه کلاسیک را زمانی که $\alpha \rightarrow 2$ ، به دست آوریم:

$$H_C = \frac{v_0^2}{g} \sin^2(\varphi)$$

قضیه ۱: فرض کنید $\mu = \frac{1}{2} \left[\Gamma(\alpha + 1) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left[\frac{v_0 \sin(\varphi)}{g} \right]^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}$ ، آنگاه رابطه بین محدوده یک پرتابه با

استفاده از محاسبات کسری (R_F) و محدوده کلاسیک (R_C) توسط $R_F = \mu R_C$ داده می شود، بنابراین:

$$v_0 \sin(\varphi) = \left[\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha + 1)} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g \quad (1) \quad R_F = R_C \text{ اگر } \mu = 1 \text{، یعنی}$$

$$v_0 \sin(\varphi) > \left[\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g \quad \text{یعنی } \mu > 1 \text{ اگر } R_F > R_C \quad (2)$$

$$v_0 \sin(\varphi) < \left[\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g \quad \text{یعنی } \mu < 1 \text{ اگر } R_F < R_C \quad (3)$$

قضیه ۲: فرض کنید ، آنگاه رابطه بین بیشینه ارتفاع یک

پرتابه با استفاده از محاسبات کسری (H_F) و بیشینه ارتفاع کلاسیک (H_C) توسط $H_F = \lambda H_C$ داده می‌شود، بنابراین:

$$v_0 \sin(\varphi) = \left[\left(2 - \frac{2}{\alpha} \right)^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g \quad \text{یعنی } \lambda = 1 \text{ اگر } H_F = H_C \quad (1)$$

$$v_0 \sin(\varphi) > \left[\left(2 - \frac{2}{\alpha} \right)^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g \quad \text{یعنی } \lambda > 1 \text{ اگر } H_F > H_C \quad (2)$$

$$v_0 \sin(\varphi) < \left[\left(2 - \frac{2}{\alpha} \right)^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g \quad \text{یعنی } \lambda < 1 \text{ اگر } H_F < H_C \quad (3)$$

قضیه ۳: زاویه بهینه (بیشینه) φ_{\max} و بیشینه محدوده پرتابه کسری $R_{F-\max}$ به ترتیب عبارت‌اند از:

$$R_{F-\max} = \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)v_0^\alpha}{\sqrt{\alpha} g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi_{\max} < \frac{\pi}{2} \quad \text{که} \quad \varphi_{\max} = \tan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}\right)$$

۴. روش پرتابی^۱ (شوتینگ)

در این مقاله هدف ما بررسی پرتابه به صورت معکوس است. یعنی فرض می‌کنیم مکان پرتابه در لحظه $t = T$ داده شده باشد، حال می‌خواهیم بدانیم این پرتابه را در لحظه‌ی شروع با چه زاویه و چه سرعت اولیه پرتاب کنیم که در لحظه $t = T$ در مکان موردنظر باشد. برای این منظور از روش پرتابی (شوتینگ) استفاده می‌کنیم، که یک روش کارا در حل مسائل مقدار مرزی است [۱۵]. برای این منظور مسئله مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = 0, & \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = -g, & \frac{3}{2} < \alpha \leq 2 \\ x(0) = 0, & x(T) = x_T \\ y(0) = 0, & y(T) = y_T \end{cases}$$

در مسئله فوق مکان متحرک در لحظه $t = T$ به صورت یک عبارت معلوم یعنی مختصات (x_T, y_T) در نظر گرفته می شود. برای حل مسئله مقدار مرزی فوق با روش پرتابی، آن را با روش مسائل مقدار اولیه حل می کنیم. یعنی پارامترهایی مانند v_{x_0} و v_{y_0} انتخاب کرده و فرض می کنیم $\dot{x}(0) = v_{x_0}$ و $\dot{y}(0) = v_{y_0}$ ، در این صورت مسئله مقدار اولیه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = 0, & \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = -g, & \frac{3}{2} < \alpha \leq 2 \\ x(0) = 0, & \dot{x}(0) = v_{x_0} \\ y(0) = 0, & \dot{y}(0) = v_{y_0} \end{cases}$$

مسئله مقدار اولیه فوق را با روش گفته شده در بخش ۲، حل می کنیم. واضح است که جواب به دست آمده به v_{x_0} و v_{y_0} بستگی دارد. اگر جواب در لحظه $t = T$ را با $x(T, v_{x_0})$ و $y(T, v_{y_0})$ نشان دهیم، v_{x_0} و v_{y_0} مطلوب، آن است که با یک تقریب خوب $x(T, v_{x_0}) = x_T$ و $y(T, v_{y_0}) = y_T$ ، چون عموماً $x(T, v_{x_0})$ و $y(T, v_{y_0})$ به x_T و y_T نزدیک نیستند، پارامتر دیگری مانند v_{x_1} و v_{y_1} انتخاب می کنیم و مسئله را با $\dot{x}(0) = v_{x_1}$ و $\dot{y}(0) = v_{y_1}$ حل می کنیم. اگر باز هم $x(T, v_{x_1})$ و $y(T, v_{y_1})$ به x_T و y_T نزدیک نباشند، مسئله را با $\dot{x}(0) = v_{x_2}$ و $\dot{y}(0) = v_{y_2}$ حل می کنیم و به همین ترتیب ادامه می دهیم. اکنون روشی برای انتخاب دنباله

بیان می کنیم به طوری که:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x(T, v_{x_k}) = x_T, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} y(T, v_{y_k}) = y_T.$$

اگر $x(t, v_{\bar{x}})$ و $y(t, v_{\bar{y}})$ جواب مسئله

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = 0, & \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = -g, & \frac{3}{2} < \alpha \leq 2 \\ x(0) = 0, & \dot{x}(0) = v_{\bar{x}} \\ y(0) = 0, & \dot{y}(0) = v_{\bar{y}} \end{cases} \quad (10)$$

باشد، مسئله عبارت است از یافتن $v_{\bar{x}}$ و $v_{\bar{y}}$ به قسمی که:

$$\begin{cases} x(T, v_{\bar{x}}) - x_T = 0 \\ y(T, v_{\bar{y}}) - y_T = 0. \end{cases}$$

معادله فوق در حالت کلی یک معادله غیرخطی است و می‌توان آن را با یکی از روش‌های حل معادلات غیرخطی حل نمود. اگر بخواهیم آن را با روش وتری حل کنیم دو تقریب اولیه v_{x_0} و v_{x_1} برای $v_{\bar{x}}$ و دو تقریب اولیه v_{y_0} و v_{y_1} برای $v_{\bar{y}}$ انتخاب نموده و فرض می‌کنیم $x(T, v_{x_0})$ ، $y(T, v_{y_0})$ و $x(T, v_{x_1})$ ، $y(T, v_{y_1})$ به ترتیب از حل مسائل زیر به دست آیند:

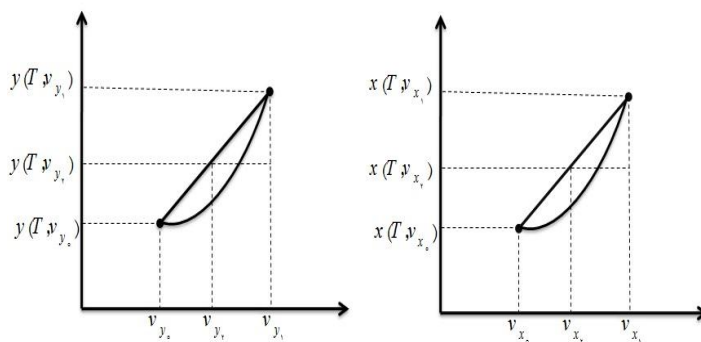
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = 0, \\ x(0) = 0, \\ y(0) = 0, \end{array} \right. \quad \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = -g, \quad \dot{x}(0) = v_{x_0}, \quad \dot{y}(0) = v_{y_0}, \quad , \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = 0, \\ x(0) = 0, \\ y(0) = 0, \end{array} \right. \quad \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = -g, \quad \dot{x}(0) = v_{x_1}, \quad \dot{y}(0) = v_{y_1}.$$

حال v_{x_2} و v_{y_2} را با توجه به شکل ۲ می‌توان از روابط زیر به دست آورد:

$$\frac{v_{x_2} - v_{x_0}}{v_{x_1} - v_{x_0}} = \frac{x_T - x(T, v_{x_0})}{x(T, v_{x_1}) - x(T, v_{x_0})}, \quad \frac{v_{y_2} - v_{y_0}}{v_{y_1} - v_{y_0}} = \frac{y_T - y(T, v_{y_0})}{y(T, v_{y_1}) - y(T, v_{y_0})},$$

$$v_{x_2} = v_{x_0} + \frac{x_T - x(T, v_{x_0})}{x(T, v_{x_1}) - x(T, v_{x_0})} (v_{x_1} - v_{x_0}),$$

$$v_{y_2} = v_{y_0} + \frac{y_T - y(T, v_{y_0})}{y(T, v_{y_1}) - y(T, v_{y_0})} (v_{y_1} - v_{y_0}).$$



شکل ۲. پیاده سازی روش وتری

اینک مسئله‌ی (۱۰) را برای تکرار سوم حل می‌کنیم تا به دست آوریم:

$$v_{x_3} = v_{x_1} + \frac{x_T - x(T, v_{x_1})}{x(T, v_{x_2}) - x(T, v_{x_1})} (v_{x_2} - v_{x_1}),$$

$$v_{y_3} = v_{y_1} + \frac{y_T - y(T, v_{y_1})}{y(T, v_{y_2}) - y(T, v_{y_1})} (v_{y_2} - v_{y_1}),$$

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. به‌طور کلی رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$v_{x_{k+1}} = v_{x_{k-1}} + \frac{x_T - x(T, v_{x_{k-1}})}{x(T, v_{x_k}) - x(T, v_{x_{k-1}})} (v_{x_k} - v_{x_{k-1}}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$v_{y_{k+1}} = v_{y_{k-1}} + \frac{y_T - y(T, v_{y_{k-1}})}{y(T, v_{y_k}) - y(T, v_{y_{k-1}})} (v_{y_k} - v_{y_{k-1}}), \quad k = 1, 2, \dots$$

محاسبات را تا زمانی متوقف می‌کنیم که برای $\varepsilon > 0$ داده‌شده، به ازای m ای داشته باشیم:

$$|x(T, v_{x_m}) - x_T| < \varepsilon,$$

$$|y(T, v_{y_m}) - y_T| < \varepsilon.$$

نکته: در این قسمت سعی شد، روش پرتابی (شوتینگ) در حالت کلی مطرح شود. یعنی حتی اگر معادله پرتابی کسری به یک معادله دیگری تغییر کند باز این روش معتبر باقی بماند. برای معادله کسری پرتابی از آنجایی که معادلات به صورت خطی حاصل می‌شوند می‌توان آن‌ها را با استفاده از روش‌های تحلیلی نیز حل نمود.

۵. نتایج عددی

در این بخش به منظور بررسی کارایی و اهمیت روش مورد مطالعه، مسئله‌ی مقدار مرزی زیر را در نظر می‌گیریم و روش پرتابی (شوتینگ) را برای آن بکار می‌بریم:

$$\begin{cases} \frac{d^{17}x}{dt^{17}} = 0, & \frac{d^{17}y}{dt^{17}} = -g \\ x(0) = 0, & x(2) = 3 \\ y(0) = 0, & y(2) = 4 \end{cases}$$

ابتدا مسئله‌ی

$$\begin{cases} \frac{d^{17}x}{dt^{17}} = 0, & \frac{d^{17}y}{dt^{17}} = -g \\ \dot{x}(0) = \bar{x}, & \dot{x}(0) = \bar{x} \\ \dot{y}(0) = \bar{y}, & \dot{y}(0) = \bar{y} \end{cases}$$

$$x(t) = \bar{x} t, \quad y(t) = -\frac{9.8t^{1.7}}{\Gamma(2.7)} + \bar{y} t$$

را به روش گفته شده در بخش ۲، حل می‌کنیم. داریم،

$$\begin{cases} x(2) - 3 = 0 \\ y(2) - 4 = 0 \end{cases}$$

مسئله به یافتن \bar{x} و \bar{y} تبدیل می‌شود به قسمی که با حل معادله‌ی فوق \bar{x} و \bar{y}

$$\begin{cases} v_0 \cos(\varphi) = 15 \\ v_0 \sin(\varphi) = 123064 \end{cases}$$

به دست می‌آیند، یعنی $\bar{x} = 15$ و $\bar{y} = 123064$. لذا خواهیم داشت:

$$v_0 = 123975 \quad \varphi = 83.0506$$

با حل دستگاه فوق خواهیم داشت

۷. تشکر و قدردانی

از تمامی دانشجویان تحصیلات تکمیلی دانشگاه پدافند هوایی خاتم الانبیاء (ص) که در این پژوهش به عنوان نمونه پژوهش حضور داشتند، تشکر و قدردانی می‌نمایم

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله سعی شد با استفاده از مدل ارائه شده در یک معادله پرتابه کسری، مدل واقعی تری را برای فاز اولیه پرتاب یک سامانه توپی ارائه دهیم. در این فاز در طی یک فرآیند معکوس با استفاده از روش پرتابی زاویه و سرعت اولیه پرتاب با روشی کارا محاسبه شد. این مسئله از آنجا اهمیت می‌یابد که در این مرحله، معمولاً یا موشک هدایت نمی‌شود و یا الگوریتم هدایت آن به صورت حلقه باز است و لذا مهم‌ترین هدف، زاویه و سرعت اولیه وسیله پرنده است، به گونه‌ای که در کمترین زمان ممکن از نظر آئرودینامیکی پایدار و کنترل پذیر شده و از پرتابگر دور شود.

این مطلب در این مقاله محقق و در قسمت نتایج عددی با بیان یک مسئله کاربردی در عمل مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل صحت روش پیشنهاد شده را نشان می‌دهد. در پایان نیز کدهای برنامه نویسی روش مورد بررسی ارائه شده است.

۷. منابع

- [1] O. P. Agrawal, "A new Lagrangian and a new Lagrange equation of motion for fractionally damped systems", J. Appl. Math. 68 (2001) 339–34
- [2] J. H. He, "Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media", Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 167 (1998) 57–6
- [3] R. Hilfer, "Applications of Fractional Calculus in Physics", World Scientific Publishing Company, Singapore, 200
- [4] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, U. Trujillo, "Theory and Applications of Fractional Differential Equations", Elsevier, Amsterdam, 200
- [5] C. Kittel, W. Knight, M. Ruderman, K. Helmholz, B. Moyer, Berkeley Physic

- "Course Mechanics", vol. 1, McGraw Hill, 197
- [6] V. Kiryakova, "Generalized Fractional Calculus and Applications Pitma Research Notes in Mathematics", Longman Harlow, 199
- [7] Yu. F. Luchko, H. M. Srivastava, "The exact solution of certain differential equations of fractional order by using operational calculus", *Comput. Math. Appl.* 29 (8) (1995) 73–8
- [8] B. N. Narahari Achar, J. W. Hanneken, T. Enck, T. Clarke, "Dynamics of the fractional oscillator", *Physica A* 297 (2001) 361–36
- [9] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, "Fractional Integrals and Derivatives-Theory and Applications", Gordon and Breach, Yverdon, PA, 199
- [10] N. Sebaa, Z. E. A. Fellah, W. Lauriks, C. Depollier, "Application of fractional calculus to ultrasonic wave propagation in human cancellous bone", *Signal Process.* 86 (2006) 2668–267
- [11] L. Song, S. Xu, J. Yang, "Dynamical models of happiness with fractional order", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 15 (2010) 616–62
- [12] J. A. Tenreiro Machado, I. S. Jesus, A. Galhano, J. Boaventura, "Curl fractional order electromagnetic", *Signal Process.* 86 (2006) 2637–264
- [13] B. Ahmad, H. Batarfi, J. Nieto, O. Otero-Zorraquinos, W. Shammak "Projectile motion via Riemann-Liouville calculus". *Adv. Difference Equ.* 2015:63, 14 p
- [14] A. Ebaid, "Analysis of projectile motion in view of fractional calculus", *Appl. Math. Model.* 35 (2011), no. 3, 1231-123
- [۱۵] کرایه چیان، علی اصغر. آنالیز عددی، انتشارات رواق مهر، ۱۳۸۴.