

Research Paper; 

Shear Buckling Analysis of Laminated Composite Plates Containing Matrix Cracks Using a Hybrid Approach of Higher-Order Shear Deformation Theory and Experimental Damage Model

keramat khodamorady¹, Keramat Malakzadeh Fard², seid mehdi nabavi³, reza sarhkosh⁴

1-Ph.D. Candidate, Faculty of Aerospace Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

2- Professor, Faculty of Aerospace Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Ira

3-Associate Professor, Faculty of Aerospace Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

4- Assistant Professor, Department of Aerospace Engineering (Aircraft Structures), Shahid Sattari Aeronautical University, Tehran, Iran

Article Information

Abstract

Accepted:
2026/05/20

Received:
2025/12/04

Keywords:

Shear buckling;
Matrix crack;
Galerkin method

Corresponding
Author:

Keramat malek
zade fard

Email:

k.malekzadeh@gm
ail.com

Introduction: Multilayered composite structures are widely used in aerospace and engineering applications due to their high strength-to-weight ratio. However, their structural performance is highly sensitive to manufacturing defects, particularly matrix cracks, which can significantly reduce the critical load-bearing capacity and accelerate buckling failure under shear loading. Therefore, developing accurate analytical models capable of accounting for damage-induced stiffness degradation is essential for reliable structural design.

Methods: An advanced analytical model was developed to predict the critical shear buckling load of thick laminated composite plates containing matrix cracks. The formulation is based on a higher-order shear deformation theory (HSDT) with 11 degrees of freedom, which accurately captures the parabolic distribution of transverse shear stresses and transverse normal strain effects without requiring shear correction factors. Stiffness degradation parameters resulting from matrix cracking were directly incorporated into the model using experimental tensile test data. The governing equations were derived through the principle of minimum potential energy and solved using the Galerkin method.

Findings: The effects of matrix crack density (0–1 crack/mm), plate thickness-to-length ratio ($a/h = 5–100$), and fiber orientation angle ($\theta = 0^\circ–90^\circ$) on the normalized critical shear buckling load and its reduction percentage were investigated. The results demonstrated that matrix cracking substantially decreases the buckling resistance of composite plates. For the $[\pm 45]_s$ laminate configuration, a crack density of 1 crack/mm resulted in a reduction of up to 64% in the critical shear buckling load. Furthermore, the proposed analytical predictions showed excellent agreement with three-dimensional elasticity solutions and finite element simulations.

Conclusion: The developed HSDT-based analytical model provides an accurate and efficient tool for evaluating the shear buckling behavior of damaged thick composite plates. The results highlight the significant influence of matrix crack density on structural stability and demonstrate the necessity of considering experimentally determined stiffness degradation in buckling analyses of composite structures.



فصلنامه علمی دفاع هوافضایی

دوره ۴ شماره ۱
بهار ۱۴۰۵
صفحات ۸۳ - ۵۷



مقاله پژوهشی؛

تحلیل کمانش برشی ورق‌های کامپوزیتی چندلایه حاوی ترک‌های ماتریسی با رویکرد

ترکیبی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا و مدل آسیب تجربی

محمد کاظم خدامرادی^۱، کرامت ملک زاده فرد^۲، سید مهدی نبوی^۳، رضا سرخوش^۴

۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

۲ استاد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

۳ دانشیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

۴ استادیار، گروه مهندسی هوافضا سازه هوایی، دانشگاه هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

چکیده

اطلاعات مقاله

چکیده

مقدمه: سازه‌های چندلایه کامپوزیتی با وجود نسبت استحکام به وزن بالا، نسبت به نقص‌های ساختاری نظیر ترک‌های ماتریسی حساسیت زیادی دارند. این ترک‌ها که معمولاً در فرآیند ساخت یا مراحل اولیه بارگذاری ایجاد می‌شوند، می‌توانند ظرفیت باربری سازه را به‌ویژه در مود کمانش برشی به‌طور قابل توجهی کاهش دهند. هدف این پژوهش بررسی تأثیر ترک‌های ماتریسی بر رفتار کمانش برشی ورق‌های کامپوزیتی ضخیم و ارائه مدلی تحلیلی برای پیش‌بینی این رفتار است.

روش: در این پژوهش از یک مدل تحلیلی مبتنی بر تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا با ۱۱ درجه آزادی استفاده شده است که بدون نیاز به ضریب تصحیح برشی، توزیع سهموی تنش‌های برشی و اثرات کرنش نرمال عرضی را مدل‌سازی می‌کند. همچنین پارامترهای افت سفتی ناشی از ترک به‌صورت مستقیم از نتایج آزمون‌های تجربی کشش در مدل اعمال شده‌اند. معادلات حاکم با استفاده از اصل کمینه انرژی پتانسیل استخراج و به روش گلرکین حل شده‌اند.

یافته‌ها: نتایج نشان داد که پارامترهای چگالی ترک ماتریسی، نسبت ضخامت به طول ورق و زاویه چیدمان الیاف تأثیر قابل توجهی بر بار بحرانی کمانش برشی دارند. با افزایش چگالی ترک، کاهش بار بحرانی تشدید شده و در چیدمان $s[\pm 45]$ و چگالی ۱ ترک بر میلی‌متر، بار کمانش تا ۶۴ درصد کاهش یافت. همچنین نتایج مدل پیشنهادی با حل‌های سه‌بعدی الاستیسیته و شبیه‌سازی اجزای محدود تطابق مناسبی نشان داد.

نتیجه‌گیری: مدل پیشنهادی از دقت و کارایی مناسبی در پیش‌بینی رفتار کمانش برشی ورق‌های کامپوزیتی دارای ترک ماتریسی برخوردار است و می‌تواند به‌عنوان ابزاری مؤثر برای تحلیل و طراحی سازه‌های کامپوزیتی آسیب‌دیده مورد استفاده قرار گیرد. همچنین نتایج بیانگر تأثیر چشمگیر ترک‌های ماتریسی بر کاهش ظرفیت باربری سازه‌ها است.

تاریخ دریافت:

۱۴۰۴/۰۹/۱۳

تاریخ پذیرش:

۱۴۰۵/۰۲/۳۰

کلیدواژه‌ها:

کمانش

برشی، ترک

ماتریسی،

روش

گلرکین

نویسنده مسئول:

کرامت ملک زاده فرد

ایمیل:

k.malekzadeh@gmail.com

استناد: کرامت ملک زاده فرد، محمد کاظم هوافضا، سید مهدی نبوی، رضا سرخوش تحلیل کمانش برشی ورق‌های کامپوزیتی چندلایه حاوی ترک‌های ماتریسی با رویکرد ترکیبی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا و مدل آسیب تجربی. مجله دفاع هوافضایی، دوره ۴ (شماره ۱)، صفحه ۸۳-۵۷.

۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر، تقاضا برای سازه‌هایی با کارایی بالا در صنایع پیشرفته‌ای همچون هوافضا، مهندسی دریایی و ساخت تجهیزات دفاعی، منجر به جایگزینی گسترده آلیاژهای فلزی سنتی با مواد کامپوزیتی چندلایه شده است. این مواد به دلیل برخورداری از ویژگی‌های منحصربه‌فردی نظیر نسبت استحکام به وزن خیره‌کننده، صلبیت بالا و قابلیت طراحی متناسب با جهت بارگذاری، به گزینه‌ای بی‌بدیل برای ساخت بدنه هواپیماها، پروانه‌های توربین و پوسته‌های زیردریایی تبدیل شده‌اند [۱، ۲]. با این حال، ماهیت لایه‌ای و ناهمسانگردی این سازه‌ها، آن‌ها را در برابر پدیده‌های ناپایداری الاستیک، به‌ویژه کمانش برشی، بسیار آسیب‌پذیر می‌سازد. در اجزای ورقه‌ای نظیر جان تیرها یا پانل‌های بال که تحت بارهای پیچشی و برشی شدید قرار دارند، کمانش برشی اغلب پیش از رسیدن ماده به حد تسلیم یا شکست نهایی رخ می‌دهد و می‌تواند منجر به فروپاشی ناگهانی سازه گردد [۳]. [۴]. بنابراین، پیش‌بینی دقیق بار بحرانی کمانش برشی نه تنها یک چالش علمی، بلکه یک ضرورت مهندسی برای تضمین ضریب اطمینان و بهینه‌سازی وزن سازه است [۵].

سیر تکاملی تحلیل پایداری ورق‌های کامپوزیتی در سه محور اصلی توسعه تئوری‌های تغییر شکل، مدل‌سازی مکانیک آسیب و روش‌های حل عددی-تحلیلی بررسی شده است. در حوزه تئوری‌های سازه‌ای، تئوری کلاسیک ورق که بر پایه فرضیات کیرشلف بنا شده بود، به دلیل نادیده گرفتن کرنش‌های برشی عرضی، نتایج غیر ایمنی برای ورق‌های ضخیم ارائه می‌داد [۶، ۷]. برای رفع این نقیصه، تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول توسط ریدر و میندلین معرفی شدند که علیرغم سادگی، نیازمند ضریب تصحیح برشی برای اصلاح توزیع تنش برشی بودند [۸، ۹]. با پیشرفت تحقیقات، تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالا توسط محققانی نظیر ردی^۱ [۱] و سایاد [۱۰] پیشنهاد گردید. این تئوری‌ها با استفاده از توابع بسط در راستای ضخامت، توزیع سهموی تنش برشی را بدون نیاز به ضریب تصحیح مدل‌سازی کردند [۱۱، ۱۲]. در سال‌های اخیر، تئوری‌های پالایش یافته‌تری نظیر تئوری‌های زیگزاگ و تئوری‌های شبه‌سه‌بعدی برای مدل‌سازی اثرات نرمال عرضی توسعه دادند که دقت تحلیل را در ورق‌های بسیار ضخیم دوچندان کرد [۱۳-۱۵].

در محور دوم، یعنی بررسی اثر نقص‌ها، ترک‌های ماتریسی به عنوان اولین و رایج‌ترین مود آسیب در لایه‌های کامپوزیتی شناخته می‌شد [۱۶]. مطالعات پیشگام تلرجا^۲ [۴، ۱۷] و هشین^۳ [۱۸] بر روی مکانیک آسیب محیط پیوسته، چارچوبی برای درک چگونگی افت خواص الاستیک در حضور ترک‌های عرضی فراهم آورد. نایرن^۴ [۱۹] و برتلوت^۵ [۲۰] با تمرکز بر انتقال تنش در لایه‌های

¹ Reddy

² Talreja

³ Hashin

⁴ Nairn

⁵ Berthelot

آسیب‌دیده، نشان دادند که چگالی ترک ماتریسی به طور مستقیم بر سفتی خمشی و برشی چندلایه تأثیرگذار است. کاشتالیان^۱ و همکاران [۳، ۲۱] با ارائه مدل‌های میکرومکانیکی، اثر ترک‌های ماتریسی را بر ماتریس سختی تعمیم‌یافته لایه‌ها بررسی نمودند. مطالعات تجربی کاترلوس^۲ [۲۲] و پاریس^۳ [۲۳] نیز ثابت کرد که حتی در بارهای پایین، جوانه زدن ترک‌های ریز در ماتریس می‌تواند منجر به کاهش قابل توجه بار بحرانی کمانش شود. در داخل کشور نیز پژوهش‌هایی در این زمینه انجام شده است. ملک زاده فرد و همکاران [۲۴] تحلیل کمانش پانل کامپوزیتی ساندویچی با هسته میانی هدفمند متقارن به روش تئوری مرتبه بالای بهبودیافته را بررسی کردند. محمدی و همکاران [۲۵] تحلیل ترک خوردگی ماتریسی و جدایی بین لایه ای چندلایه های کامپوزیتی متقارن تحت بارگذاری استاتیکی به روش خرابی چندمقیاسی را بررسی نمودند. پورموید و همکارانش [۲۶] به بررسی کمانش و پس کمانش لوله کامپوزیتی تقویت شده با آلیاژ حافظه دار تحت فشار داخلی پرداختند. با این حال، تلفیق تئوری مرتبه بالا با داده‌های تجربی ککش برای مدل‌سازی ترک ماتریسی در پژوهش‌های داخلی دیده نمی‌شود.

در محور سوم، تحلیل پایداری ورق‌های تحت بار برشی به دلیل ماهیت کوپل شده معادلات حاکم، پیچیدگی‌های بیشتری نسبت به کمانش فشاری دارد. چوی [۲۷] و تایلور^۴ [۲۸] از اولین کسانی بودند که حل‌های دقیقی برای کمانش برشی ورق‌های ارتوتروپیک ارائه دادند. لپرسکو^۵ [۲۹] و باترا^۶ [۳۰] تأثیر اثرات دینامیکی و حرارتی را بر روی پایداری برشی بررسی کردند. با ظهور روش‌های عددی پیشرفته، تحقیقات به سمت استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی و یادگیری ماشین برای پیش‌بینی کمانش سوق پیدا کردند [۳۱، ۳۲]. در مطالعات اخیر، دنگ^۷ [۸] و ژو^۸ [۳۳] کمانش و شکست پانل‌های ساندویچی را تحت بار برشی بررسی کردند. همچنین، استفاده از روش‌های بدون المان و روش‌های گلرکین توسط محققانی نظیر ژائو^۹ [۳۴] و وو^{۱۰} [۳۵] برای حل مسائل ناپایداری با هندسه‌های پیچیده مورد توجه قرار گرفت. علاوه بر این، مطالعات ارمیس^{۱۱} [۷] و شیرین‌بیان [۶] بر روی تلفیق مدل‌های میکرومکانیکی با روش‌های هوش مصنوعی، افق‌های جدیدی را در پیش‌بینی عمر خستگی و پایداری سازه‌های معیوب گشوده است [۳۶-۳۸]. علی‌رغم گستردگی مطالعات در دو حوزه تئوری‌های مرتبه بالا و مکانیک آسیب، همچنان یک شکاف تحقیقاتی جدی در تلفیق این دو حوزه دیده می‌شود. اکثر پژوهش‌های پیشین یا بر مدل‌های تحلیلی پیچیده برای

1 Kashtalyan

2 Katerelos

3 Paris

4 Taylor

5 Librescu

6 Batra

7 Deng

8 Zhou

9 Zhao

10 Wu

11 Ermis

ورق‌های سالم تمرکز داشته‌اند و یا اثر آسیب را در تئوری‌های ساده‌شده (نظیر کلاسیک یا مرتبه اول برش) بررسی شده است که دقت کافی برای سازه‌های ضخیم را ندارد. همچنین، بسیاری از مدل‌های آسیب موجود، صرفاً بر پایه روابط ریاضی نظری هستند که ممکن است با رفتار واقعی ماده کامپوزیتی در شرایط عملیات ساخت مطابقت نداشته باشند.

نوآوری اصلی این پژوهش در ارائه یک مدل تحلیلی-تجربی یکپارچه است که برای نخستین بار ویژگی‌های زیر را به طور همزمان پوشش می‌دهد. استفاده از یک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای W با وجود توأم ترک‌ها ماتریسی که نه تنها توزیع برشی سهموی را بدون ضریب تصحیح لحاظ می‌کند، بلکه برخلاف اکثر مدل‌های موجود، اثرات کرنش نرمال عرضی و تغییر ضخامت را نیز در تحلیل کمانش برشی گنجانده است.

اثر ترک‌های ماتریسی به صورت مستقیم و کالیبره شده با آزمون تجربی کشش که در این رویکرد، به جای تکیه بر ثابت‌های آسیب تئوریک اعمال شده است. ضرایب افت سفتی لایه‌ها از نتایج واقعی آزمون‌های کشش مطابق با استاندارد ASTM D3039 انجام شده و در ماتریس‌های سختی 11×11 مدل تحلیلی اعمال شده‌اند. استخراج معادلات حاکم بر پایه روابط کرنش-جابجایی غیرخطی فون کارمن و حل آن‌ها با استفاده از روش گلرکین برای شرایط بارگذاری برشی خالص، که منجر به شناسایی دقیق نرخ کاهش بار کمانش نسبت به چگالی ترک در چیدمان‌های مختلف شده است. این رویکرد ترکیبی، ابزاری دقیق و سریع (در مقایسه با مدل‌های اجزای محدود سنگین) را در اختیار طراحان قرار می‌دهد تا رفتار پایداری سازه‌های کامپوزیتی را در حضور نقایص واقعی ناشی از ساخت یا بارگذاری‌های اولیه، با ضریب اطمینان بالاتری پیش‌بینی کنند.

۲- مواد و روش

۲-۱ جنس و لایه چینی نمونه‌ها

در این پژوهش از کامپوزیت شیشه/اپوکسی با لایه چینی متقارن استفاده شد. الیاف تقویتی از نوع E-glass با وزن سطحی ۳۰۰ گرم بر مترمربع و رزین اپوکسی از نوع EPL-10122 با هاردنر EPH113 نسبت اختلاط ۳۰ به ۱۰۰ (رزین و هاردنر) به کار رفت. ضخامت هر لایه پس از ۰/۲۵ میلی‌متر و ضخامت کل چندلایه ۲ میلی‌متر (۸ لایه) در نظر گرفته شد. خواص مکانیکی پایه ماده سالم در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول شماره ۱: شماره خواص مکانیکی لایه کامپوزیتی شیشه/اپوکسی سالم

ضخامت لایه (mm)	ν_{12}	G_{12} (GPa)	E_2 (GPa)	E_1 (GPa)
۱	۰/۲۱۴	۴/۱۴	۸/۲۷	۳۸/۶

۲-۲ ساخت نمونه‌های کامپوزیتی و ایجاد ترک‌های ماتریسی کنترل شده

به منظور ساخت نمونه‌های کامپوزیتی، از روش قالب‌گیری انتقال رزین به کمک خلاً (VARTM) استفاده گردید. قالب شیشه‌ای با ابعاد 300×300 میلی‌متر تهیه و سطح داخلی آن به‌طور کامل با ماده جداکننده (واکس) پوشش داده شد تا از چسبندگی رزین به قالب جلوگیری شود. سپس لایه‌های پارچه شیشه‌ای از نوع E-glass با وزن سطحی 300 گرم بر مترمربع، به‌صورت خشک و با زوایای مشخص مطابق با لایه‌چینی مورد نظر بر روی قالب چیده شدند. پس از اتمام لایه‌چینی، به منظور شبیه‌سازی ترک‌های ماتریسی با چگالی معین، بر روی لایه‌ی مورد نظر با الگوهای برشی مشخصی ایجاد گردید. برای این کار، از دستگاه فیچی مخصوص استفاده شد تا تنها پارچه برش خورده و الیاف آسیبی نبینند. فاصله بین شیارها به‌گونه‌ای تنظیم گردید که چگالی ترک‌های هدف برابر با $0/2$ ، $0/5$ و 1 ترک بر میلی‌متر حاصل شود. عمق شیارها حدود $0/1$ میلی‌متر کنترل شد تا ترک‌ها تنها در سطح لایه ماتریس ایجاد شوند. پس از ایجاد ترک‌های کنترل شده، یک لایه پارچه مش (مش توزیع رزین) روی مجموعه قرار داده شد و سپس یک لایه داکرو (لایه جداکننده) بر روی آن تعبیه گردید. در دو طرف قالب، یک شیلنگ ورودی برای تزریق رزین و یک شیلنگ خروجی برای اتصال به پمپ خلاً نصب شد. کلیه اتصالات و لبه‌های کیسه خلاً با استفاده از چسب آب‌بندی مخصوص، به‌طور کامل مسدود گردید تا از بروز هرگونه نشتی جلوگیری شود. پس از آب‌بندی، شیلنگ خروجی به پمپ خلاً متصل و خلاً با فشار مطلق 0.8 بار اعمال گردید. رزین اپوکسی از نوع EP-200 با نسبت اختلاط $100:30$ (وزنی) در یک محفظه رزین‌تراپ ریخته شده و تحت تأثیر خلاً، به درون قالب هدایت شد. رزین به‌تدریج در میان لایه‌های خشک نفوذ کرده و تمامی پارچه را به‌طور کامل خیس نمود. پس از تکمیل فرآیند تزریق، شیلنگ ورودی بسته شد و رزین اضافی توسط خلاً به سمت مخزن جمع‌آوری هدایت گردید.

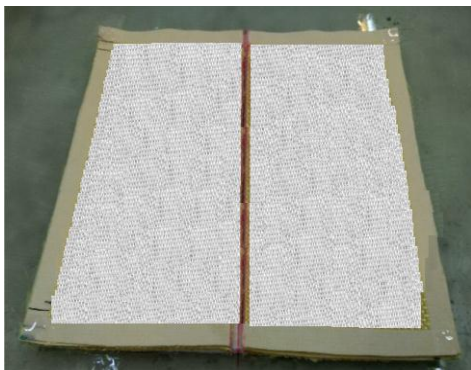
نمونه‌ها به مدت 24 ساعت در دمای محیط (حدود 25 درجه سانتی‌گراد) قرار داده شدند تا پخت اولیه انجام گیرد. سپس قطعات از قالب خارج شده و به مدت یک هفته در همان شرایط دمایی جهت پخت کامل (پس کیورینگ) نگهداری شدند. در نهایت، نمونه‌ها با استفاده از دستگاه واترجت، مطابق با ابعاد استاندارد آزمون کشش (25×250 میلی‌متر) برش داده شدند. جهت تأیید کیفیت ساخت و چگالی ترک‌های ایجادشده، از هر گروه نمونه، مقطع‌گیری انجام شده و زیر میکروسکوپ نوری مورد بررسی قرار گرفت تا:

۱. ترک‌ها تنها در همان لایه‌های مورد نظر باقی مانده‌اند.

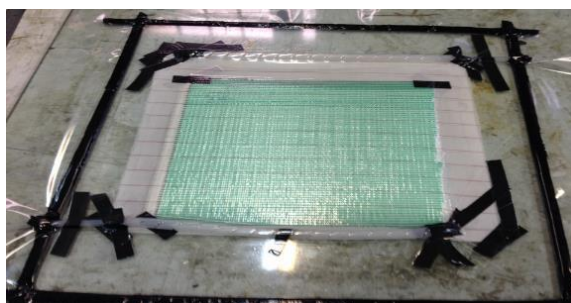
۲. الیاف آسیبی ندیده‌اند.

۳. چگالی واقعی ترک با مقدار هدف مطابقت دارد.

بدین ترتیب، سه دسته نمونه مجزا با چگالی ترک $0/2$ ، $0/5$ و 1 ترک بر میلی‌متر به همراه یک گروه سالم (بدون ترک) ساخته شدند. هر گروه شامل 3 نمونه برای آزمون کشش و 3 نمونه برای اعتبارسنجی میکروسکوپی بود.



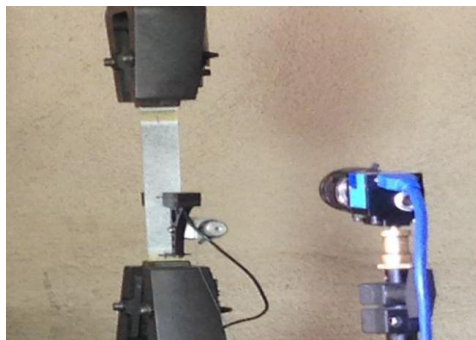
شکل ۱: برش لایه‌های مورد نیاز جهت ایجاد ترک



شکل ۲: سیستم آب‌بندی شده VARTM



شکل ۳: برش قطعه با واتر جت و آماده سازی نمونه



شکل ۴: قرارگیری نمونه در دستگاه کشش اینسترون

۲-۳ آزمون کشش تک‌محوری و استخراج ضرایب افت سفتی برای نمونه سالم و دارای ترک

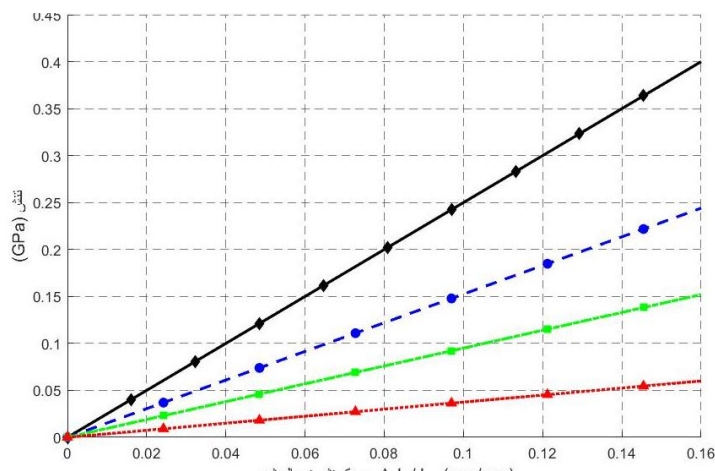
مطابق شکل ۴ آزمون کشش بر روی نمونه‌های سالم و آسیب‌دیده انجام شد. از دستگاه کشش اینسترون با سرعت بارگذاری ۲ میلی‌متر بر دقیقه استفاده گردید. کرنش محوری توسط اکستنسیومتر ثبت شد. نمودار تنش-کرنش برای هر گروه رسم و مدول الاستیک مؤثر از شیب ناحیه خطی محاسبه گردید. ضریب افت سفتی مؤثر به صورت نسبت مدول آسیب‌دیده به مدول سالم تعریف شد. سپس با استفاده از یک فرآیند حل معکوس مطابق رابطه شماره (۱) ضرایب کاهش خواص در سطح لایه یعنی E_2^d و G_{12}^d برای هر چگالی ترک استخراج شدند. نتایج این استخراج در جدول ۲ نشان داده شده است.

$$E_2^d = (1 - d_{E2})E_2 \quad (۱)$$

$$G_{12}^d = (1 - d_{G12})G_{12}$$

جدول شماره ۲: ضرایب کاهش خواص لایه برای چگالی‌های مختلف ترک ماتریسی

G_{12}^d	E_2^d	چگالی ترک crack/mm
۰/۱۸	۰/۱۵	۰/۲
۰/۴۲	۰/۳۸	۰/۵
۰/۶۴	۰/۶۱	۱



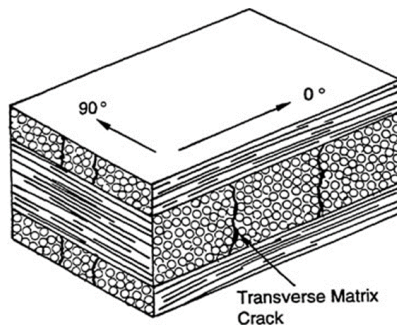
شکل ۵: نمودار تنش - کرنش برای حالت دارای ترک و بدون ترک برای چگالی متفاوت

شکل (۵) نمودار تنش-کرنش نمونه سالم و نمونه دارای ترک ماتریسی را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده گردید، حضور ترک‌های ماتریسی موجب کاهش شیب اولیه منحنی تنش-کرنش شده

است که بیانگر افت مدول الاستیک مؤثر لمینیت می‌باشد. همچنین نمونه آسیب‌دیده در تمامی سطوح کرنش، تنش کمتری نسبت به نمونه سالم تحمل می‌کند. این رفتار ناشی از کاهش قابلیت انتقال تنش در ماتریس و تضعیف مکانیزم انتقال بار بین الیاف مجاور است. نتایج حاصل از این نمودار مبنای استخراج ضرایب افت خواص مکانیکی و اعمال آن‌ها در مدل تحلیلی کمانش قرار گرفته است.

۳- فرمولاسیون مسئله

هندس‌ه پانل ساندویچی مستطیلی با طول a ، عرض b و ضخامت h در نظر گرفته شده است که دستگاه مختصات در صفحه میانی پانل قرار دارد.



شکل ۶: ابعاد چندلایه مفروض دارای ترک ایجادشده با الگوی لایه چینی صفر و نود [۳۹]

در این پژوهش، به منظور بررسی ترک ماتریسی مطابق شکل ۶ که یک مدل نقص ساختاری است که در مرحله تولید در مواد کامپوزیت چندلایه به وجود آمده است بر رفتار بار کمانش برشی اثر می‌گذارد برای دستیابی به بالاترین دقت در تحلیل پایداری برشی ورق‌های و مدل‌سازی دقیق اثر نقص‌های ماتریسی، از یک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا با ۱۱ درجه آزادی مستقل استفاده شده است. اگرچه تئوری‌های مرتبه اول برشی قادر به حل مسئله هستند، اما در ورق‌های ضخیم کامپوزیتی حاوی ترک ماتریسی، به دلیل وابستگی شدید رفتار کمانشی به تنش‌ها و کرنش‌های برشی عرضی، دقت کافی ندارند و نیازمند ضریب تصحیح برشی هستند. از آنجا که هدف پژوهش حاضر بررسی اثر افت سفتی ناشی از ترک‌های ماتریسی بر رفتار کمانش برشی ورق‌های ضخیم است، استفاده از تئوری مرتبه بالای ۱۱ درجه آزادی که توزیع واقعی تنش برشی و کرنش نرمال عرضی را مدل می‌کند ضروری بوده است. برخلاف تئوری‌های کلاسیک و مرتبه اول که در آن‌ها میدان جابجایی تنها با ۵ متغیر تعریف شده است، مدل حاضر میدان‌های جابجایی را به صورت بسط چندجمله‌ای در راستای ضخامت در نظر می‌گیرد:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + zu_1(x, y) + z^2u_2(x, y) + z^3u_3(x, y) \quad (2)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + zv_1(x, y) + z^2v_2(x, y) + z^3v_3(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + zw_1(x, y) + z^2w_2(x, y)$$

u_0 ، v_0 و w_0 به ترتیب بیانگر انتقال‌های صلب و تغییر شکل‌های غشایی صفحه میانی هستند u_1 ، v_1 و w_1 و معادل دوران‌های سطح مقطع در تئوری مرتبه اول هستند. u_2 ، v_2 و w_2 جملات انحنای مرتبه دوم که نشان‌دهنده تابیدگی^۱ اولیه سطح مقطع هستند. u_3 ، v_3 و w_3 جملات مرتبه سوم که برای ارضای شرایط مرزی تنش برشی صفر ضروری هستند. بدون این جملات، توزیع برشی سهموی حاصل نشده است. w_1 ، w_2 این جملات نوآوری مهم مدل هستند. در تئوری‌های کلاسیک w ثابت فرض شده است. اما در اینجا، w_1 نشان‌دهنده کرنش نرمال اولیه و w_2 نشان‌دهنده گرادیان کرنش نرمال در ضخامت است. این امر امکان مدل‌سازی اثر تغییر ضخامت ورق تحت بار را فراهم می‌کند. انتخاب این مدل مرتبه بالا بسیار حیاتی است. یک چندلایه تحت بار، تغییر شکل غیرخطی قابل توجهی در راستای ضخامت از خود نشان می‌دهد. بسط چندجمله‌ای درجه سوم مدل اجازه می‌دهد تا نه تنها کرنش‌های برشی عرضی، بلکه کرنش نرمال عرضی را نیز در نظر بگیرد. این قابلیت که در اکثر تئوری‌های ورق نادیده گرفته می‌شود. روابط کرنش-جابجایی خطی برای چندلایه بر اساس معادله شماره (۳) از این میدان‌های جابجایی استخراج گردید. در اینجا فرض شده است که اثرات غیرخطی عمدتاً ناشی از خیز صفحه میانی w_0 است. این یک فرض استاندارد در تحلیل کماتش ورق‌ها است.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 = \left(\sum_{i=0}^3 z^i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \quad (۳)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 = \left(\sum_{i=0}^3 z^i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = w_1 + 2zw_2$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} = \sum_{i=0}^3 z^i \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = (u_1 + 2zu_2 + 3z^2u_3) + (w_{0,x} + zw_{1,x} + z^2w_{2,x})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = (v_1 + 2zv_2 + 3z^2v_3) + (w_{0,y} + zw_{1,y} + z^2w_{2,y})$$

نکته مهم در اینجا وجود جملات تا مرتبه z^2 در کرنش برشی است که توزیع سهموی تنش برشی در ضخامت را تضمین می‌کند. وجود ϵ_z خطی (غیر صفر) یکی از برتری‌های این مدل نسبت به تئوری‌های کلاسیک است که در آن‌ها معمولاً ϵ_z صفر فرض گردید. برای معادلات ساختاری لایه معادل برای N لایه ارتوتروپیک، ماتریس‌های سختی تعمیم‌یافته $H_{ij}^{(n)}$ با انتگرال‌گیری در ضخامت

^۱ Warping

محاسبه می‌شوند. با توجه به اینکه میدان جابجایی شامل توان‌های Z تا مرتبه ۳ است و در محاسبه انرژی ضرب می‌شوند (تا مرتبه ۶، Z^6 ، ماتریس‌های سختی مراتب بسیار بالا مورد نیاز است.

$$H_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z^n dz, n = 0, 1, \dots, 6 \quad (4)$$

این ماتریس‌ها u_i, v_i, w_i و w_i های مختلف را در معادلات تعادل را به یکدیگر کوپل می‌کنند.

۳-۱ معادلات ساختاری و مدل‌سازی آسیب

برای یک لایه کامپوزیتی ارتوتروپیک، رابطه تنش- کرنش در دستگاه مختصات اصلی ماده توسط ماتریس سختی C بیان گردید. برای حالت تنش صفحه‌ای (که اغلب در لایه‌ها فرض می‌شود اما در اینجا به دلیل وجود ϵ_z تعمیم یافته است، ماتریس سختی کاهش یافته $[Q]$ استفاده شد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz}^{(k)} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(\bar{Q}_{11})} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (5)$$

در اینجا $[\bar{Q}]$ ماتریس سختی منتقل شده به دستگاه مختصات سراسری (x, y, z) است که با استفاده از ماتریس‌های دوران و زاویه لایه‌گذاری θ محاسبه گردید.

نوآوری کلیدی در بخش مواد، نحوه اعمال اثر ترک‌های ماتریسی است. به جای استفاده از مدل‌های تئوری صرف که ممکن است با واقعیت تطابق نداشته باشند، از یک رویکرد ترکیبی (هیبرید) استفاده شده است. بر اساس مدل معادل محدود شده که توسط کاشتالیان توسعه یافته و در این پژوهش با داده‌های تجربی کالیبره شده است، حضور ترک‌ها در ماتریس باعث کاهش پارامترهای سختی لایه گردید مفروض بر این که ترک‌ها باعث کاهش مدول الاستیسیته عرضی (E_2) و مدول برشی داخل صفحه (G_{12}) می‌شوند، زیرا این خواص مستقیماً وابسته به ماتریس هستند. مدول طولی (E_2) که تحت کنترل الیاف است، بدون تغییر باقی می‌ماند. مطابق رابطه شماره (۱) G_{12}^d مقادیر E_2^d و G_{12}^d توابعی از چگالی ترک ρ_0 هستند. در این پژوهش، این مقادیر d_{E_2} و $d_{G_{12}}$ مستقیماً از آزمون‌های کشش تجربی استخراج شده و سپس در ماتریس سختی لایه‌های آسیب‌دیده جایگذاری شده‌اند. این روش دقت پیش‌بینی را به شدت افزایش می‌دهد زیرا اثرات واقعی میکرومکانیکی را به صورت ماکروسکوپی لحاظ می‌کند.

۳-۲ استخراج معادلات حاکم

تحلیل کمانش برشی ورق‌های کامپوزیتی چندلایه حاوی ترک‌های ماتریسی با رویکرد ترکیبی تئوری تغییر در این پژوهش، اصل کمینه‌سازی انرژی به عنوان مبنای اصلی فرمول‌بندی انتخاب شده است.

$$\int (\delta U - \delta V) dt = 0 \quad (۶)$$

برای تحلیل کمانش استاتیکی، δV کار نیروی خارجی و U انرژی کرنشی کل سیستم که مجموع انرژی‌های کرنشی رویه‌ها و هسته است:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \epsilon dV = \frac{1}{2} \int_A \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\epsilon^{(k)T} [\bar{Q}]^{(k)} \epsilon^{(k)}) dz dA \quad (۷)$$

V کار انجام‌شده توسط نیروهای خارجی که شامل کار ناشی از بار برشی صفحه‌ای است که عامل ناپایداری است.

$$V = -\frac{1}{2} \int_A \left[N_x^0 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + N_y^0 \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] dA \quad (۸)$$

برای حالت کمانش برشی خالص، تنها جمله شامل باقی می‌ماند.

$$V = -\int_A N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} dA \quad (۹)$$

در تحلیل کمانش، کار انجام شده توسط تنش‌های اولیه روی تغییر شکل‌های غیرخطی ناشی از کمانش محاسبه شده است. برای یک ورق تحت نیروی برشی خالص N_{xy}^0 در لبه‌ها، پتانسیل نیروهای خارجی برابر است. u ، v و w به ترتیب تغییر مکان‌ها در جهت محورهای x ، y و z روی رویه‌های بالایی و پایینی است. جایگذاری روابط کرنش بر حسب ۱۱ متغیر میدان جابجایی u_i ، v_i و w_i ماتریس سختی الاستیک 11×11 (به ازای هر گره یا نود) تشکیل شد. اگرچه میدان جابجایی شامل w_1 و w_2 است، اما در تحلیل کمانش کلاسیک، ناپایداری اصلی توسط خیز غشایی w_0 کنترل می‌شود. با این حال، در تحلیل‌های پیشرفته‌تر می‌توان اثر تنش‌های اولیه بر سایر مولفه‌ها را نیز لحاظ کرد، اما ترم غالب همان جمله فوق است. در تحلیل کمانش وقتی یک ورق یا پوسته تحت فشار قرار می‌گیرد، بیشترین جابجایی که رخ می‌دهد، شکم دادن یا جابجایی عمودی صفحه میانی است که با w_0 نشان داده شده است. با جایگذاری روابط کرنش-جابجایی در انرژی کرنشی کل و محاسبه کار نیروهای خارجی، تابع انرژی پتانسیل کل سیستم تشکیل گردید. سپس با اعمال اصل همپلتون و شرط $\delta \Pi = 0$ ، معادلات تعادل استخراج شد. پس از انجام انتگرال‌گیری جزء به جزء روی جملات مشتق‌دار و جمع‌آوری ضرایب متغیرهای مستقل میدان جابجایی، رابطه (۱۰) حاصل گردید است.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \{N_x \delta u_{0,x} + M_x \delta u_{1,x} + P_x \delta u_{2,x} + R_x \delta u_{3,x} \\
& + N_y \delta v_{0,y} + M_y \delta v_{1,y} + P_y \delta v_{2,y} + R_y \delta v_{3,y} \\
& + N_{xy} (\delta u_{0,y} + \delta v_{0,x}) + M_{xy} (\delta w_{1,y} + \delta v_{1,x}) \\
& + P_{xy} (\delta w_{2,y} + \delta v_{2,x}) + R_{xy} (\delta u_{3,y} + \delta v_{3,x}) \\
& + Q_x (\delta w_1 + \delta w_{0,x}) + S_x (2\delta w_2 + \delta w_{1,x}) + T_x (3\delta w_3 + \delta w_{2,x}) \\
& + Q_y (\delta v_1 + \delta w_{0,y}) + S_y (2\delta v_2 + \delta w_{1,y}) + T_y (3\delta v_3 + \delta w_{2,y}) \\
& + [N_x w_{0,x} + N_{xy} w_{0,y} + M_x w_{1,x} + M_{xy} w_{1,y} + P_x w_{2,x} + P_{xy} w_{2,y}] \delta w_{0,x} \\
& + [N_y w_{0,y} + N_{xy} w_{0,x} + M_y w_{1,y} + M_{xy} w_{1,x} + P_y w_{2,y} + P_{xy} w_{2,x}] \delta w_{0,y} \\
& + [M_x w_{0,x} + M_{xy} w_{0,y} + P_x w_{1,x} + P_{xy} w_{1,y} + R_x w_{2,x} + R_{xy} w_{2,y}] \delta w_{1,x} \\
& + [M_y w_{0,y} + M_{xy} w_{0,x} + P_y w_{1,y} + P_{xy} w_{1,x} + R_y w_{2,y} + R_{xy} w_{2,x}] \delta w_{1,y} \\
& + [P_x w_{0,x} + P_{xy} w_{0,y} + R_x w_{1,x} + R_{xy} w_{1,y}] \delta w_{2,x} \\
& + [P_y w_{0,y} + P_{xy} w_{0,x} + R_y w_{1,y} + R_{xy} w_{1,x}] \delta w_{2,y} \} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} N_{xy}^0 (\delta w_{0,y} + \delta v_{0,x} + w_{0,x} \delta w_{0,y} + w_{0,y} \delta w_{0,x}) d\Omega = 0
\end{aligned}$$

که با انتگرال گیری جزیه جز معادلات دیفرانسیل شماره (۱۱) استخراج خواهد شد.

(۱۱)

$$\begin{aligned}
\delta u_0 &= 0 \text{ or } N_{xx,x} - N_{xy,y} = 0 \\
\delta u_1 &= 0 \text{ or } -M_{xx,x} - M_{xy,y} + Q_{xz} = 0 \\
\delta u_2 &= 0 \text{ or } -P_{xx,x} - P_{xy,y} + 2S_{xz} = 0 \\
\delta u_3 &= 0 \text{ or } -R_{xx,x} - R_{xy,y} + 3T_{xz} = 0 \\
\delta v_0 &= 0 \text{ or } -N_{yy,y} - N_{xy,x} = 0 \\
\delta v_1 &= 0 \text{ or } -M_{yy,y} - M_{xy,x} + Q_{yz} = 0 \\
\delta v_2 &= 0 \text{ or } -P_{yy,y} - P_{xy,x} + 2S_{yz} = 0 \\
\delta v_3 &= 0 \text{ or } -R_{yy,y} - R_{xy,x} + 3T_{yz} = 0 \\
\delta w_0 &= 0 \text{ or } -Q_{xz,x} - Q_{yz,y} - \frac{\partial}{\partial x} (w_{0,x} N_{xx} + w_{0,y} N_{xy}) \\
& - \frac{\partial}{\partial y} (w_{0,y} N_{yy} + w_{0,x} N_{xy}) = 0 \\
\delta w_1 &= 0 \text{ or } -S_{xz,x} - S_{yz,y} + N_{zz} = 0 \\
\delta w_2 &= 0 \text{ or } -T_{xz,x} - T_{yz,y} + 2M_{zz} = 0
\end{aligned}$$

و شرایط مرزی در مرزها مطابق رابطه (۱۱) نیز استخراج گردید.

$$(x = 0, a) \quad (۱۲)$$

$$\begin{aligned}
\delta u_0 &= 0 \text{ or } N_{xx} - \hat{N}_{xx} - \hat{N}_{xy} = 0 \\
\delta u_1 &= 0 \text{ or } M_{xx} = 0 \\
\delta u_2 &= 0 \text{ or } P_{xx} = 0 \\
\delta u_3 &= 0 \text{ or } R_{xx} = 0 R_{xx} \\
\delta v_0 &= 0 \text{ or } N_{xy}^t = 0 \\
\delta v_{1t} &= 0 \text{ or } M_{xy}^t = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta v_2 &= 0 \text{ or } P_{xy} = 0 \\ \delta v_3 &= 0 \text{ or } R_{xy} = 0 \\ \delta w_0 &= 0 \text{ or } N_{xx}w_{0,x} + N_{xy}w_{0,y} + Q_{xz} = 0 \\ \delta w_1 &= 0 \text{ or } S_{xz} = 0 \\ \delta w_2 &= 0 \text{ or } T_{xz} = 0 \end{aligned} \quad (y = 0. b)$$

$$\begin{aligned} \delta u_0 &= 0 \text{ or } N_{xy} = 0 \\ \delta u_1 &= 0 \text{ or } M_{xy} = 0 \\ \delta u_2 &= 0 \text{ or } P_{xy} = 0 \\ \delta u_3 &= 0 \text{ or } R_{xy} = 0 \\ \delta v_0 &= 0 \text{ or } N_{yy} + \hat{N}_{xy} + \hat{N}_{yy} = 0 \\ \delta v_1 &= 0 \text{ or } M_{yy} = 0 \\ \delta v_2 &= 0 \text{ or } P_{yy} = 0 \\ \delta v_3 &= 0 \text{ or } R_{yy} = 0 \\ \delta w_0 &= 0 \text{ or } N_{yy}w_{0,y} + N_{xy}w_{0,x} + Q_{yz} = 0 \\ \delta w_1 &= 0 \text{ or } S_{yz} = 0 \\ \delta w_2 &= 0 \text{ or } T_{yz} = 0 \end{aligned}$$

با جایگذاری منتج‌های تنش روابط شماره (۱۳) در معادلات دیفرانسیل شماره (۱۲) معادلات جبری به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} (N_x \cdot N_y \cdot N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \tau_{xy}) dz \\ (M_x \cdot M_y \cdot M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \tau_{xy}) z dz \\ (P_x \cdot P_y \cdot P_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \tau_{xy}) z^2 dz \\ (R_x \cdot R_y \cdot R_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \tau_{xy}) z^3 dz \\ (Q_x \cdot Q_y) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz} \cdot \tau_{yz}) dz \\ (S_x \cdot S_y) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz} \cdot \tau_{yz}) z dz \\ (T_x \cdot T_y) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz} \cdot \tau_{yz}) z^2 dz \end{aligned} \quad (۱۳)$$

برای صفحه با چهار لبه مفصل، توابع شکل شماره (۱۴) فرض شده است لازم به ذکر است تمام نتایج برای این پژوهش حالت مفصلی مفروض است.

$$\begin{aligned} \phi_{mn}^{(w)}(x.y) &= \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \psi_{mn}^{(u)}(x.y) &= \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \psi_{mn}^{(v)} &= \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

این انتخاب باعث شده است که شرایط اساسی $w_0 = M_n = 0$ به طور دقیق ارضا شود و انتگرال های فضایی به صورت تحلیلی محاسبه شوند و ماتریس سختی الاستیک قطری شود. هر ۱۱ متغیر با استفاده از سری های فوریه گسترش می یابد

$$\begin{aligned} w_k(x.y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn}^{(k)} \phi_{mn}^{(w)}(x.y) . k = 0.1.2 \\ u_k(x.y) &= \sum_{m,n} U_{mn}^{(k)} \psi_{mn}^{(u)}(x.y) . k = 0.1.2.3 \\ v_k(x.y) &= \sum_{m,n} V_{mn}^{(k)} \psi_{mn}^{(v)}(x.y) . k = 0.1.2.3 \end{aligned} \quad (15)$$

با روش گلرکین و انتگرال گیری، دستگاه معادلات به صورت مسئله مقدار ویژه خطی و دستگاه معادلات جبری حاصل شده است

$$([K_L]_{(11 \times 11)} + \lambda [K_G]_{(11 \times 11)}) \{\Phi\}_{(11 \times 1)} = \{0\} \quad (16)$$

که در آن λ پارامتر بار کمانش است و Φ بردار بزرگی های عامل سری های (شامل تمام ضرایب $W_{mn}^{(k)}$ ، $U_{mn}^{(k)}$ و $V_{mn}^{(k)}$) ماتریس سختی الاستیک (شامل تمام ترم های خطی و کوپل شده) K_G ماتریس سختی هندسی که فقط حاوی ترم های غیرخطی ناشی از N_{xy} است. ضرایب K در مرجع [۴۰] موجود است.

$$\begin{aligned} [K_L] &= \begin{bmatrix} [K_{uu}]_{4 \times 4} & [K_{uv}]_{4 \times 4} & [K_{uw}]_{4 \times 3} \\ [K_{vu}]_{4 \times 4} & [K_{vv}]_{4 \times 4} & [K_{vw}]_{4 \times 3} \\ [K_{wu}]_{3 \times 4} & [K_{wv}]_{3 \times 4} & [K_{ww}]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ [K_G] &= \begin{bmatrix} [0]_{8 \times 8} & [0]_{8 \times 3} \\ [0]_{3 \times 8} & [K_{G.ww}]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ [K_{G.ww}] &= \begin{bmatrix} 2\partial_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

ماتریس K_G فقط در بلوک مربوط به w_0 غیرصفر است، ولی به دلیل وجود بلوک های غیرقطری K_{uv} و K_{vw} تمام ۱۱ معادله به یکدیگر کوپل می شوند. برخلاف کمانش محوری، در کمانش برشی تمام ۱۱ معادله باید همزمان حل شوند زیرا بلوک های K_{uv} و K_{vw} غیرصفر هستند. این

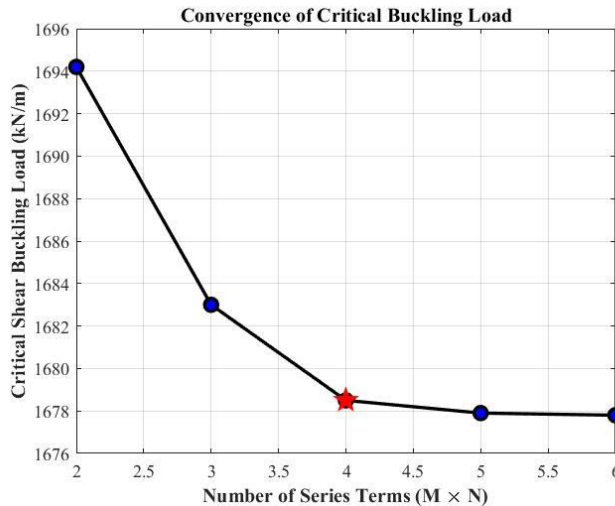
تحلیل کمانش برشی ورق‌های کامپوزیتی چندلایه حاوی ترک‌های ماتریسی با رویکرد ترکیبی تئوری تغییر کوپل شدن فیزیکی نشان می‌دهد که در کمانش برشی، جابجایی‌های درون صفحه‌ای و قابل تفکیک نیستند.

۴- نتایج و بحث

در این بخش، رفتار همگرایی بار بحرانی کمانش برشی نسبت به تعداد جملات سری (توابع پایه) مورد مطالعه قرار گرفته شده است. همان‌طور که در شکل ۷ نشان داده شده است، با افزایش تعداد مدهای از 2×2 به 6×6 مقادیر N_{xy}^{cr} به صورت مونوتونیک از پایین به مقدار همگرا نزدیک شده است. این رفتار مورد انتظار برای روش‌های مبتنی بر اصل کمینه کردن انرژی پتانسیل است و نشان‌دهنده پایداری عددی و صحت پیاده‌سازی کد است. لازم به ذکر است روش ریتز و گلرکین می‌توانند نتایج مشابهی ارائه دهند. دلیل اصلی انتخاب روش گلرکین در پژوهش حاضر، وجود جملات غیرخطی و کوپل شدگی قوی بین معادلات ناشی از تئوری مرتبه بالا (HSDT) با ۱۱ درجه آزادی و همچنین جمله غیرخطی فون کارمن در کرنش‌ها است. در روش ریتز، نیاز به یک تابع پتانسیل انرژی کل (II) و سپس مشتق‌گیری نسبت به ضرایب مجهول وجود دارد که در سیستم‌های با تعداد زیاد متغیرهای وابسته (۱۱ متغیر میدان جابجایی) ممکن است منجر به توابع پیچیده و حجم محاسباتی بالا شود. روش گلرکین مستقیماً معادلات دیفرانسیل حاکم (که از اصل کمینه انرژی استخراج شده‌اند) را وزن‌دهی و انتگرال‌گیری می‌کند و پیاده‌سازی آن برای سیستم معادلات کوپل ساده‌تر است. همچنین در مسائل کمانش برشی، به دلیل غیرمقارن بودن ماتریس سختی هندسی در برخی فرمولاسیون‌ها (اگرچه در اینجا مقارن است)، روش گلرکین انعطاف بیشتری دارد.

۴-۱ بررسی همگرایی بار بحرانی کمانش برشی

نتایج همگرایی در شکل ۷ نشان داده شده است. با استفاده از 2×2 مود (دو جمله سری در جهت x و دو جمله در جهت y)، بار بحرانی $1694/2$ kN/m محاسبه شده است که نسبت به مقدار همگرایی نهایی ($1678/5$ kN/m) حدود $1/2$ درصد خطا دارد. با افزایش مدها به 4×4 ، خطا به کمتر از $0/2$ درصد کاهش می‌یابد. بنابراین در ادامه از 4×4 مود استفاده شده است. و مقدار N_{xy}^{cr} به $1678/5$ کیلونیوتن بر متر می‌رسد. تقارب سریع روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌هایی مانند المان محدود که نیاز به شبکه‌بندی 10×10 یا بیشتر دارند، برتری محسوس این روش را نشان می‌دهد.



شکل ۷: نتایج تحلیل همگرایی بار بحرانی کمانش برشی بر حسب تعداد مدهای سری (m×n) برای ورق سالم بدون ترک

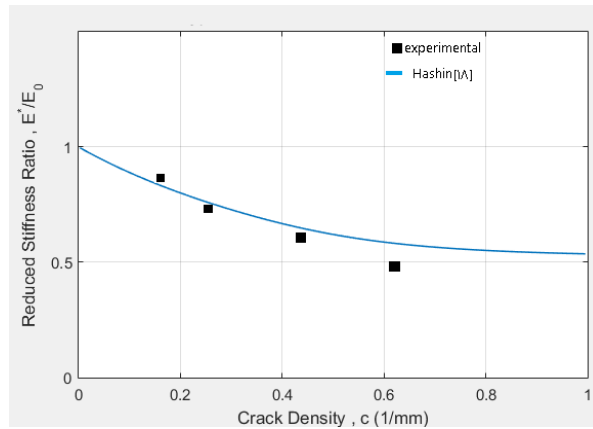
شکل مقادیر عددی دقیق را برای هر حالت نشان می‌دهد. که تفاوت بین حالت‌های (۵×۵) و (۶×۶) کمتر از ۰/۰۵ درصد است که از همگرایی کامل حکایت دارد. بنابراین، برای تمام تحلیل‌های بعدی، از (۴×۴) مود استفاده شده است که تعادل مناسبی بین دقت و کارایی محاسباتی برقرار می‌کند.

۴-۲ انجام آزمون کشش و استخراج خواص کاهشی

آزمون‌های کشش تک‌محوری بر روی نمونه‌های سالم و دارای ترک (سه دسته با چگالی ۰/۲، ۰/۵ و ۱ ترک بر میلی‌متر) مطابق استاندارد ASTM D3039 انجام شد. نمونه‌ها تحت بارگذاری کششی کنترل شده تا لحظه شکست قرار گرفتند و داده‌های نیرو-جابجایی توسط اکستنسئومتر ثبت گردید. سپس نمودار تنش-کرنش مهندسی برای هر گروه رسم شد.

در نمونه‌های سالم، مدول الاستیک مؤثر چندلایه از شیب ناحیه خطی نمودار تعیین گردید. در نمونه‌های حاوی ترک، حضور ترک‌های ماتریسی باعث کاهش شیب اولیه نمودار تنش-کرنش شد. مدول مؤثر نمونه‌های آسیب‌دیده از شیب اولیه محاسبه و ضریب افت مدول به صورت نسبت مدول نمونه دارای ترک به مدول نمونه سالم تعریف گردید.

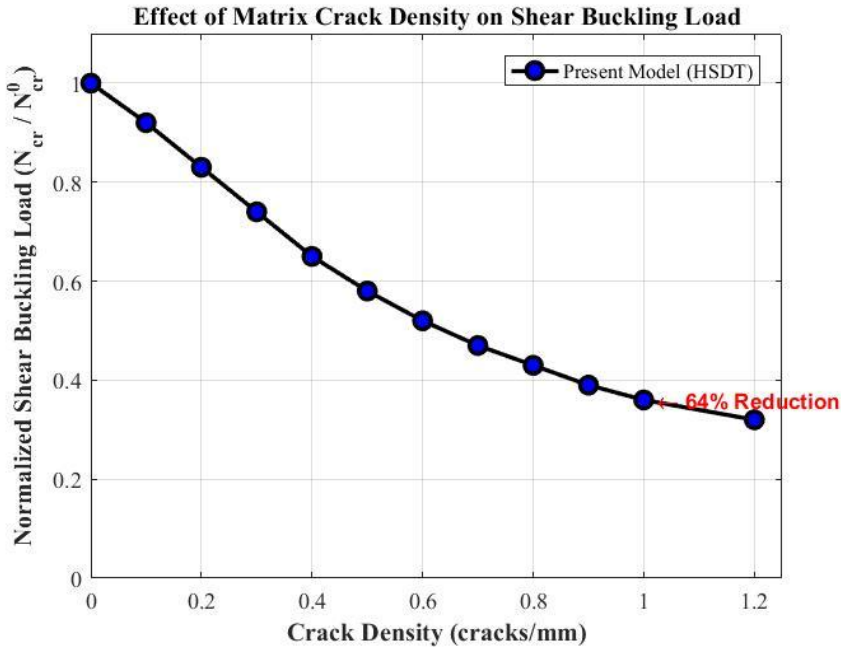
برای اعتبارسنجی مدل کاهش خواص، نتایج تجربی حاصل از سه گروه نمونه با چگالی ترک متفاوت، با مدل تئوری هشین [۱۸] که برای ورق‌های نازک حاوی ترک معتبر است، مقایسه شد (شکل ۸). تطابق خوب بین نتایج تجربی و تئوری نشان می‌دهد که روش ایجاد ترک در زمان ساخت (برش لیزری لایه‌های خشک) توانسته است رفتار واقعی آسیب ماتریسی را شبیه‌سازی کند. در این مدل، فرض شده است که ترک‌های ماتریسی تنها مدول الاستیسیته عرضی و مدول برشی داخل صفحه را کاهش می‌دهند، در حالی که مدول طولی بدون تغییر باقی می‌ماند. ضرایب افت خواص استخراج شده در جدول ۲ ارائه شده است.



شکل ۸: اعتبار سنجی نمودار نرمال شده افت سفتی چندلایه با مقاله مرجع هشین [۱۸]

۴-۳ اثرات چگالی ترک ماتریسی در افت کماتش

نتایج حاصل از مدل تحلیلی حاضر برای سه چگالی ترک ۰/۲، ۰/۵ و ۱ ترک بر میلی‌متر در شکل ۹ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش چگالی ترک از صفر به ۱ ترک بر میلی‌متر، بار بحرانی کماتش برشی نرمال شده به صورت غیرخطی کاهش می‌یابد. در بازه چگالی ۰ تا ۰/۵ ترک/میلی‌متر، شیب منحنی بسیار تند است. این رفتار نشان می‌دهد که ظهور اولین ترک‌ها بیشترین تأثیر مخرب را بر ماتریس سختی برشی و در نتیجه پایداری کلی سازه دارند. به عبارت دیگر، حتی چگالی کم ترک نیز کاهش قابل توجهی در ظرفیت باربری ایجاد می‌کند. در نقطه بحرانی با چگالی ۱ ترک بر میلی‌متر و در چیدمان $[\pm 45]$ ، نسبت بار کماتش به مقدار ۰/۳۶ می‌رسد که معادل ۶۴ درصد افت ظرفیت باربری نسبت به نمونه سالم است. در چگالی‌های بالاتر از ۱ ترک بر میلی‌متر، نرخ کاهش بار کمتر شده و نمودار به سمت یک مقدار حدی میل می‌کند که ناشی از پدیده اشباع ترک در لایه‌ها است.



شکل ۹: تاثیر چگالی ترک ماتریسی بر بار کماتش برشی نرمال شده ورق کامپوزیتی

۴-۴ اعتبارسنجی مدل

به منظور اطمینان از صحت عملکرد کد محاسباتی و دقت تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا (HSDT) به کار رفته، نتایج بار کماتش برشی برای یک ورق مربعی گرافیت/اپوکسی بدون ترک با نتایج معتبر تای و چوی در جدول ۳ مقایسه شد. چیدمان لایه‌ها به صورت متعامد $[0/90]_s$ و خواص ماده ارتوتروپیک $E_1 = 40E_2$ در نظر گرفته شده است همان‌طور که در جدول ۳ مشاهده شده است، نتایج مدل حاضر در طیف وسیعی از نسبت‌های ضخامت (از ورق بسیار ضخیم $a/h = 5$ تا ورق نازک $a/h = 100$) تطابق عالی با مرجع دارد. حداکثر خطای نسبی مشاهده شده کمتر از ۰/۲ درصد است که نشان‌دهنده دقت بالای روش حل گلرکین و فرمول‌بندی HSDT در پیش‌بینی رفتار کماتشی، به‌ویژه در موده‌های برشی حاکم بر ورق‌های ضخیم است. از پارامتر بی‌بعد کماتش برشی رابطه شماره (۱۸) استفاده شده است.

$$\bar{N}_{xy} = \frac{N_{xy.cr} \cdot b^2}{D\pi^2} \quad (18)$$

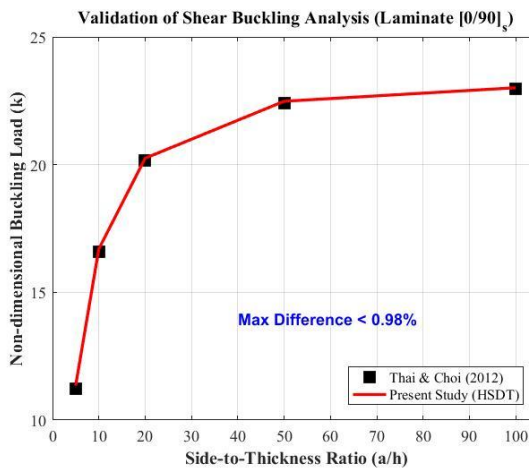
که D نماینده سفتی خمشی ورق است.

نسبت ضخامت (a/h)	مرجع [۲۷]	مدل پیشنهادی	درصد خطا
(خیلی ضخیم)	۱۱/۲۴	۱۱/ ۲۶	۰/۱۸
۱۰ (ضخیم)	۱۶/۵۸	۱۶/۶۰	۰/۱۲
۲۰ (متوسط)	۲۰/۱۵	۲۰/۱۷	۰/۱۰
۵۰ (نازک)	۲۲/۴۰	۲۲/۴۱	۰/۰۴
۱۰۰ (خیلی نازک)	۲۲/۹۵	۲۲/۹۶	۰/۰۴

۴-۵ تاثیر نسبت ضخامت (a/h) و بر میزان افت بار کماتش در حضور ترک‌های

ماتریسی

شکل ۱۰ حساسیت بار کماتش نرمال شده را نسبت به تغییرات نسبت لاغری مقایسه می‌کند. نتایج بیانگر نکات زیر است:



شکل ۱۰: تاثیر نسبت ضخامت (a/h) بر میزان افت بار کماتش در حضور ترک‌های ماتریسی

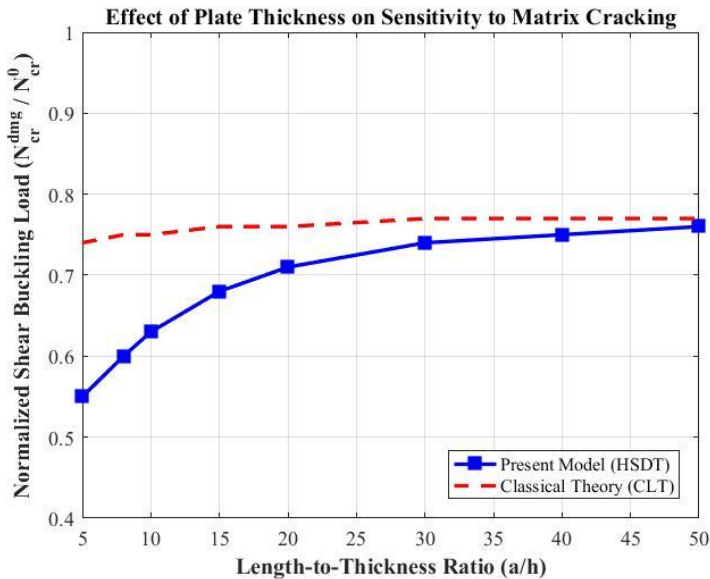
رفتار متفاوت در ورق‌های ضخیم: در ناحیه ورق‌های ضخیم، مدل پیشنهادی (HSDT) افت بسیار شدیدتری را در ظرفیت باربری نشان می‌دهد. به عنوان مثال، وجود ترک باعث کاهش ۴۵ درصدی بار شد (مقدار ۰.۵۵)، در حالی که تئوری کلاسیک به اشتباه کاهش کمتری (حدود ۲۶ درصد) را پیش‌بینی می‌کند.

دلیل فیزیکی: در ورق‌های ضخیم، مقاومت در برابر کماتش به شدت به سختی برشی عرضی وابسته است. از آنجا که ترک‌های ماتریسی مستقیماً مدول‌های برشی را تضعیف می‌کنند، تئوری‌های مرتبه بالا که کرنش برشی را لحاظ می‌کنند (مانند این پژوهش)، به درستی این افت شدید را آشکار می‌سازند.

همگرایی در ورق‌های نازک: با افزایش (نازک شدن ورق)، اثر تغییر شکل برشی کاهش یافته و رفتار خمشی غالب است. در نتیجه، پیش‌بینی‌های مدل حاضر و تئوری کلاسیک به یکدیگر نزدیک می‌شوند.

نتیجه‌گیری مهم: این نمودار اثبات می‌کند که برای طراحی سازه‌های کامپوزیتی ضخیم و معیوب، استفاده از تئوری‌های کلاسیک غیرایمن است و مدل HSDT پیشنهادی ضرورت دارد.

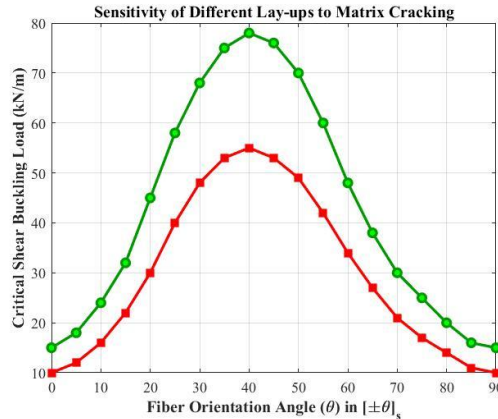
در شکل ۱۱، تأثیر نسبت طول به عرض (a/b) بر بار کمانش برشی نرمال شده ورق کامپوزیتی نشان داده شده است. با افزایش نسبت طول به عرض، مقدار بار کمانش نرمال شده کاهش می‌یابد، زیرا ورق طویل‌تر در برابر بارهای برشی ناپایدارتر است. این رفتار نشان می‌دهد که صفحات با نسبت ابعاد نزدیک به مربع (نسبت طول به عرض نزدیک ۱) مقاومت کمانشی بالاتری دارند و طراحی صفحات کامپوزیتی برای کاربردهای تحمل‌کننده بار برشی باید با در نظر گرفتن این نسبت بهینه انجام شود.



شکل ۱۱: تأثیر نسبت طول بر عرض بر بار کمانش برشی نرمال شده ورق کامپوزیتی دارای ترک

۴-۶ اثر زاویه چیدمان الیاف بر حساسیت به آسیب

شکل ۱۲ تأثیر زاویه الیاف (θ) را در لمینیت‌های زاویه‌ای متقارن $[\pm\theta]_s$ بر بار بحرانی کمانش برشی، برای دو حالت سالم و آسیب‌دیده مقایسه می‌کند. نتایج حاصل حاوی نکات طراحی مهمی است:



شکل ۱۲: تاثیر زاویه الیاف را در لمینیت‌های زاویه‌ای متقارن بر بار بحرانی کماتش برشی برای دو حالت با ترک و بدون ترک

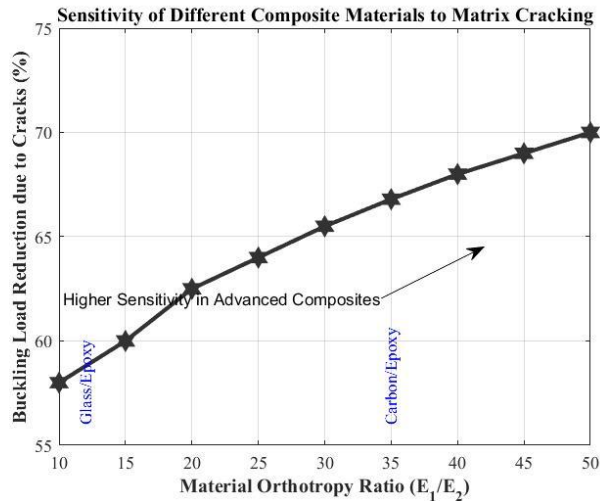
زاویه بهینه: همان‌طور که انتظار می‌رود، برای هر دو حالت سالم و آسیب‌دیده، بیشترین مقاومت کماتش برشی در محدوده زاویه $\theta = 45^\circ$ رخ می‌دهد. این امر به دلیل انطباق راستای تنش‌های اصلی کششی-فشاری در برش خالص با راستای الیاف است.

حساسیت حداکثری در زاویه بهینه: نکته بسیار مهم این است که بیشترین مقدار عددی افت بار (فاصله عمودی بین دو نمودار) نیز دقیقاً در حوالی زاویه ۴۵ درجه رخ می‌دهد. به عبارت دیگر، قوی‌ترین چیدمان (۴۵ درجه)، بیشترین مقدار ظرفیت باربری را در اثر ترک از دست می‌دهد. دلیل مکانیکی: در زوایای نزدیک به ۰ یا ۹۰ درجه، سفتی لمینیت عمدتاً توسط مدول‌های طولی (E_1) کنترل می‌شود و نقش مدول برشی (G_{12}) کمتر است. اما در زوایای نزدیک به ۴۵ درجه، سهم مدول برشی داخل صفحه (G_{12}) در ماتریس سختی کلی سازه بیشینه می‌شود. از آنجا که ترک‌های ماتریسی دقیقاً (G_{12}) را هدف قرار داده و تضعیف می‌کنند، چیدمان‌های ۴۵ درجه بیشترین آسیب‌پذیری نسبی را از خود نشان می‌دهند.

نتیجه‌گیری برای طراحی: اگرچه چیدمان $\pm 45^\circ$ همچنان بالاترین بار کماتش را دارد، اما طراحان باید ضرایب اطمینان بزرگ‌تری را برای این چیدمان در محیط‌های مستعد ترک‌خوردگی (مانند خستگی حرارتی) در نظر بگیرند.

۴-۷ اثر نسبت ناهمسانگردی ماده (E_1/E_2) بر شدت افت با کماتشی

شکل ۱۳ تاثیر نوع ماده کامپوزیتی (که با نسبت ناهمسانگردی بیان شده است) را بر میزان حساسیت سازه به ترک‌های ماتریسی نشان می‌دهد. در این نمودار، مقادیر پایین $30 - 40 \approx E_1/E_2$ نماینده کامپوزیت‌های الیاف شیشه (Glass/Epoxy) و مقادیر بالا $10 - 15 \approx E_1/E_2$ نماینده کامپوزیت‌های الیاف کربن پیشرفته (Carbon/Epoxy) هستند.



شکل ۱۳: اثر نسبت ناهمسانگردی ماده (E_1/E_2) بر شدت افت بار

همان طور که در نمودار شماره ۱۳ مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت ناهمسانگردی، درصد افت بار کماتش ناشی از ترک افزایش می‌یابد. برای مثال، در حالی که کامپوزیت شیشه حدود ۵۸٪ افت بار دارد، این مقدار برای کامپوزیت کربن به حدود ۷۰٪ می‌رسد. توجه مکانیکی: در مواد با ناهمسانگردی بالا (مانند کربن)، الیاف بسیار صلب هستند (بسیار بزرگ)، اما ماتریس همچنان پلیمری و نسبتاً نرم است. این اختلاف سختی باعث می‌شود که سهم عمده‌ای از پایداری برشی وابسته به انتقال بار توسط ماتریس باشد. وقتی ترک‌های ماتریسی ایجاد می‌شوند، این پل‌های انتقال بار ضعیف بین الیاف صلب از بین می‌روند و سازه دچار افت شدیدتری می‌شود. این نتیجه هشدار جدی برای طراحان سازه‌های هوفضایی است که از کامپوزیت‌های کربنی استفاده می‌کنند؛ زیرا این مواد علی‌رغم استحکام بالاتر، در صورت بروز ترک‌های ریز، افت عملکرد شدیدتری نسبت به کامپوزیت‌های معمولی از خود نشان می‌دهند

۵- نتایج و پیشنهادات

در این پژوهش، تحلیل کماتش برشی ورق‌های کامپوزیتی چندلایه دارای ترک‌های ماتریسی با استفاده از یک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا با ۱۱ درجه آزادی انجام شد. اهم نتایج به شرح زیر است:

۱. مدل تحلیلی توسعه‌یافته توانایی بالایی در پیش‌بینی رفتار سازه‌های ضخیم دارد و بدون نیاز به ضریب تصحیح برشی، توزیع تنش‌ها را به دقت برآورد می‌کند.
۲. حضور ترک‌های ماتریسی به عنوان نقص اولیه، اثر مخربی بر پایداری برشی دارد؛ به‌طوری‌که در چگالی ترک ۱ ترک/میلی‌متر، بار بحرانی کماتش تا ۶۴٪ کاهش می‌یابد.
۳. روش حل گلرکین همگرایی بسیار سریعی دارد و با انتخاب تعداد جملات سری دقت کافی حاصل می‌شود که از نظر هزینه محاسباتی بسیار بهینه‌تر از روش‌های اجزای محدود است.

تحلیل کماتش برشی ورق‌های کامپوزیتی چندلایه حاوی ترک‌های ماتریسی با رویکرد ترکیبی تئوری تغییر
۴. استفاده از ضرایب افت خواص مستخرج از آزمون تجربی در مدل تحلیلی، منجر به
واقعی‌تر شدن پیش‌بینی‌ها نسبت به مدل‌های تئوری صرف شده است..

۶- تشکر و قدردانی

در این قسمت نویسندگان می‌توانند در صورت لزوم مراتب تشکر و قدردانی خود را از حامیان تحقیق
که به صورت غیرمستقیم در پیشبرد آن نقش داشته‌اند، بیان کنند.

۷- تعارض منافع

نویسنده(گان) اعلام می‌دارند که در مورد انتشار این مقاله تضاد منافع وجود ندارد. علاوه بر این،
موضوعات اخلاقی شامل سرقت ادبی، رضایت آگاهانه، سوء رفتار، جعل داده‌ها، انتشار و ارسال مجدد
و مکرر توسط نویسندگان رعایت شده است.

۸- دسترسی آزاد

این نشریه دارای دسترسی باز است و اجازه اشتراک (تکثیر و بازرایی محتوا به هر شکل) و انطباق
(بازترکیب، تغییر شکل و بازسازی بر اساس محتوا) را می‌دهد.

۹- منابع

- [1] Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. CRC Press.
- [2] Jones, R. M. (1999). *Mechanics of Composite Materials*. Taylor & Francis
- [3] Kashtalyan, M., & Soutis, C. (2000). Stiffness degradation in cross-ply laminates with matrix cracks in 90° and 0°
- [4] Talreja, R., & Varna, J. (2015). *Modeling Damage, Fatigue and Failure of Composite Materials*. Woodhead Publishing.
- [5] Sun, C. T., & Vaidya, R. S. (1996). Prediction of composite properties from a representative volume element. *Composites Science and Technology*, 56(2), 171-179.
- [6] Shirinbayan, M., Nouria, S., Zghal, J., & Fitoussi, J. (2025). A hybrid approach for predicting fatigue life of fiber-reinforced polypropylene composite: integrating micromechanical modelling. *Composites Part C: Open Access*, 16, 100660.
- [7] Ermis, M., Dorduncu, M., & Aydogan, G. (2025). Physics-based machine learning for modeling of laminated composite plates based on refined zigzag theory. *Archive of Applied Mechanics*, 95(5), 1-24.
- [8] Deng, J., Zhao, J., Peng, A., & Zhou, G. (2025). Buckling and failure mechanisms of asymmetric composite sandwich panels subjected to shear loadings. *Engineering Failure Analysis*, 167, 109039.

- [9] Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12, 69-77.
- [10] Sayyad, A. S., Ghugal, Y. M., & Kant, T. (2025). Static and Vibration Analysis of Laminated Sandwich Hyperbolic and Elliptical Paraboloids. *AIAA Journal*, 63(1), 1-17.
- [11] Thai, H. T., & Kim, S. E. (2015). A review of theories for the modeling and analysis of non-homogeneous microstructure-dependent structures. *Composite Structures*, 128, 134-154.
- [12] Kant, T., & Swaminathan, K. (2001). Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory. *Composite Structures*, 53(1), 73-85.
- [13] Carrera, E. (2003). Theories and finite elements for multilayered plates and shells. *Progress in Aerospace Sciences*, 39(2-3), 97-146.
- [14] Tessler, A., Di Sciuva, M., & Gherlone, M. (2009). A refined zigzag theory for laminated composite and sandwich plates. *NASA Technical Reports*, TP-2009-215555.
- [15] Murakami, H. (1986). Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. *Journal of Applied Mechanics*, 53(3), 661-666.
- [16] Highsmith, A. L., & Reifsnider, K. L. (1982). Stiffness-reduction mechanisms in composite laminates. *ASTM Special Technical Publication*, 775, 103-117.
- [17] Talreja, R. (1986). Continuum damage mechanics for composite materials. *Polymer Composites*, 7(5), 348-354.
- [18] Hashin, Z. (1985). Analysis of cracked laminates: a variational approach. *Mechanics of Materials*, 4(2), 121-136.
- [19] Nairn, J. A. (2000). Matrix microcracking in composites. *Comprehensive Composite Materials*, 2, 403-432.
- [20] Berthelot, J. M. (2003). Transverse cracking and delamination in cross-ply glass-fiber and carbon-fiber reinforced plastic laminates. *Applied Mechanics Reviews*, 56(1), 111-147.
- [21] Kashtalyan, M. (2003). Three-dimensional elasticity solution for layered panels with stepped-wise varying properties. *Composite Structures*, 62(2), 135-144.
- [22] Katerelos, D. T. G., Kashtalyan, M., & Galiotis, C. (2008). Matrix cracking in polymeric composites laminates: Modelling and experiments. *Composites Science and Technology*, 68(12), 2310-2317.
- [23] Paris, F., Correa, E., & Mantic, V. (2007). Kinking of a transverse matrix crack at the interface in a fiber-reinforced composite. *Journal of Applied Mechanics*, 74(4), 703-716.
- [24] Malekzadeh Fard, Analysis of Buckling of Sandwich Composite Panel with Symmetric Functionally Graded Core Using Improved Higher-

- Order Theory. *Aerospace Mechanics Journal (Quarterly)*, 8(1), 1391 (In Persian).
- [25] Mohammadi, B.; Asl Kamkar, S.; Farrokh Abadi, A. (2017). Analysis of Matrix Cracking and Delamination of Symmetric Composite Laminates Under Static Loading Using Multi-Scale Failure Method. *Journal of Science and Technology of Composites*, 4(1), pp. 9-24 (In Persian).
- [26] Pourmoayed, A., Ranjbar, M. A., & Seyednejad, S. M. (2025). Buckling and post-buckling analysis of composite pipe reinforced with shape memory alloy under internal pressure. *Science and Technology in Mechanical Engineering*, 4(2). (In Persian)
- [27] Thai, H. T., & Choi, D. H. (2012). A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling of laminated composite plates. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 34, 130-140.
- [28] Taylor, R. L., & Sackman, J. L. (1967). Buckling of orthotropic rectangular plates. *AIAA Journal*, 5(3), 397-402.
- [29] Librescu, L. (1975). *Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogeneous Shell-Type Structures*. Noordhoff International.
- [30] atra, R. C., & Vidoli, P. (2002). Higher-order piezoelectric plate theory derived from a three-dimensional variational principle. *AIAA Journal*, 40(11), 2359-2369.
- [31] Singh, S. S., Singh, S. K., & Chakrabarti, A. (2013). Buckling analysis of laminated composite plates using an efficient higher-order theory. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 32(14), 1017-1029.
- [32] Muc, A. (2006). Buckling and post-buckling behavior of laminated composite plates. *Key Engineering Materials*, 326, 1335-1338.
- [33] Zhou, G., Deng, J., & Zhao, J. (2022). Experimental investigation on shear buckling of composite panels with multiple matrix cracks. *Composite Structures*, 280, 114850.
- [34] Zhao, J., & Wei, G. W. (2002). Galerkin method for the vibration and buckling of composite plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(41-42), 4561-4571.
- [35] Wu, C. P., & Lin, C. Y. (2004). Three-dimensional buckling analysis of composite laminates with different boundary conditions. *Composite Structures*, 63(3-4), 317-333.
- [36] Patel, A. (2024). Experimental and numerical buckling analysis of CNT reinforced polymer composite plates. *Materials Science and Technology*, 40(2), 112-125.
- [37] Ghugal, Y. M., & Sayyad, A. S. (2008). A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated plates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 27(6), 629-666.

- [38] Oliveira Pedro, J. J., Nascimento, S., & Hendy, C. (2025). Shear buckling resistance models for steel plate girders – Numerical investigation. *Engineering Structures*, 322, 119054.
- [39] Accelerated Aging of Materials and Structures: The Effects of Long-Term Elevated-Temperature Exposure. Washington, DC: The National Academies Press, 1996. doi: 10.17226/9251
- [40] Khodamoradi, M.k., Malekzadeh Fard, K. (2026). Shear Buckling Analysis of Sandwich laminate with a Flexible Core Using a Higher-Order Theory and the Galerkin Method. *Scientific-Research Journal of Aerospace Engineering, Air University*, 28(2), Autumn and Winter (In Persian).