

ISSN: 2821-157X		https://www.jasd.khadu.ir	
	Journal of Aerospace Defense Volume 4 Issue 2 Summer 2025 Pages 1 – 26		
Research Paper; 			
Investigation and Comparison of Porous Core and Viscoelastic Core on the Natural Frequencies of Sandwich Structures Aiming to Enhance the Strength and Safety of Defensive Structures Ali Asghar Naderi¹, Hadi Teymouri², Mehdi Pourseifi³ ¹. Faculty of Engineering and Flight, Imam Ali University of Military Sciences, Tehran, Iran ². Department of Mechanical Engineering, Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran ³. Faculty of Flight Engineering, Imam Ali University of Military Sciences, Tehran, Iran			
Article Information		Abstract	
Accepted: 2025/09/10 Received: 2025/08/02 Keywords: Natural frequency, Porous core, Viscoelastic core, sandwich beam, Hamilton's principle Corresponding Author: Ali Asghar Naderi Email: abcdef@ut.ac.ir		The security and survivability of defensive structures against extreme dynamic loads such as blast waves and impacts is a fundamental priority in modern design. Sandwich panels, due to their exceptional strength-to-weight ratio and high energy absorption capacity, are among the primary candidate materials in this field. This research investigates and compares the influence of two widely used core types the porous core and the viscoelastic core on the natural frequencies of a sandwich beam structure. The main objective of this study is to assess the potential of these cores to enhance the strength and safety of defensive structures through the analysis of their vibrational behavior. The present research employs analytical modeling to perform the natural frequency analysis. Using three-layer sandwich beam theory and applying Hamilton's principle, the governing equations of the system are derived. The resulting equations are complex partial differential equations (PDEs). To solve these equilibrium equations, the semi-analytical Navier method is utilized in the spatial domain. To validate the accuracy of the obtained results, comparisons are made with existing solutions for specific cases. Finally, the influence of various parameters such as carbon nanotube volume fraction, porosity coefficient, porosity distribution pattern, geometric and dimensional ratios on the natural frequencies of the sandwich structure is examined. This investigation covers structures with both porous and viscoelastic cores and nanocomposite face sheets. A key finding of this research is that, in most instances, the viscoelastic core exhibits higher natural frequencies and greater strength compared to the porous core.	
HOW TO CITE: Ali Asghar Naderi, Hadi Teymouri, Mehdi Pourseifi.(2025).Investigation and Comparison of Porous Core and Viscoelastic Core on the Natural Frequencies of Sandwich Structures Aiming to Enhance the Strength and Safety of Defensive Structures. <i>Journal of Aerospace Defense</i>, Vol 4(Issue 2), Page 1-26.			

ISSN: 2821-157X		https://www.jasd.khadu.ir	
	فصلنامه علمی دفاع هوافضایی دوره ۴ شماره ۲ تابستان ۱۴۰۴ صفحات ۲۶ - ۱		
مقاله پژوهشی؛ 			
بررسی و مقایسه هسته متخلخل و ویسکوالاستیک در فرکانس‌های طبیعی سازه ساندویچی در راستای افزایش استحکام و ایمنی سازه‌های دفاعی علی اصغر نادری^۱، هادی تیموری^۲، مهدی پورسیفی^۳ ۱. دانشکده مهندسی و پرواز، دانشگاه افسری امام علی، تهران، ایران ۲. گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران ۳. دانشکده مهندسی پرواز، دانشگاه افسری امام علی، تهران، ایران			
چکیده		اطلاعات مقاله	
امنیت و بقاپذیری سازه‌های دفاعی در برابر بارهای دینامیکی شدید مانند موج انفجار و ضربه، یک اولویت اساسی در طراحی‌های نوین است. پانل‌های ساندویچی به دلیل نسبت استثنایی استحکام به وزن و ظرفیت بالای جذب انرژی، به عنوان یکی از گزینه‌های اصلی در این حوزه مطرح هستند. این پژوهش به بررسی و مقایسه تأثیر دو نوع هسته پرکاربرد، یعنی هسته متخلخل و هسته ویسکوالاستیک بر فرکانس‌های طبیعی سازه (تیر) ساندویچی می‌پردازد. هدف اصلی این مطالعه، ارزیابی پتانسیل این هسته‌ها در افزایش استحکام و ایمنی سازه‌های دفاعی از طریق تحلیل رفتار ارتعاشی آن‌ها است. پژوهش حاضر از مدل‌سازی تحلیلی برای انجام تحلیل و بررسی فرکانس‌های طبیعی استفاده می‌کند، بطوریکه با استفاده از تئوری سه لایه تیر ساندویچی و به کمک اصل همبالتون معادلات حاکم بر سیستم بدست می‌آیند. معادلات به‌دست آمده به صورت معادلات دیفرانسیل پیچیده با مشتقات جزئی می‌باشند که برای حل این معادلات تعادل، از روش نیمه‌تحلیلی ناویر در حوزه‌ی مکان استفاده شده است. به منظور بررسی صحت و دقت نتایج به‌دست آمده، مقایسه‌ای با جواب‌های موجود برای حالات خاص ارائه گردیده است. در انتها تأثیر پارامترهای مختلف همچون درصد حجمی نانو لوله کربنی، ضریب تخلخل، الگوی توزیع تخلخل، نسبت پارامترهای هندسی و ابعادی بر روی فرکانس‌های طبیعی سازه ساندویچی با هسته متخلخل و ویسکوالاستیک و رویه‌های نانو کامپوزیتی بررسی شده است. از جمله نتایج مهم حاصل از این تحقیق این است که در بیشتر مواقع، هسته ویسکوالاستیک دارای فرکانس طبیعی و استحکام بیشتری نسبت به هسته متخلخل می‌باشد.		تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۵/۱۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۶/۱۰ کلیدواژه‌ها: فرکانس طبیعی، هسته متخلخل، هسته ویسکوالاستیک، تیر ساندویچی، اصل همبالتون	
		نویسنده مسئول: علی اصغر نادری ایمیل: abcdef@ut.ac.ir	
		استناد: علی اصغر نادری، هادی تیموری، مهدی پورسیفی (۱۴۰۴). بررسی و مقایسه هسته متخلخل و ویسکوالاستیک در فرکانس‌های طبیعی سازه ساندویچی در راستای افزایش استحکام و ایمنی سازه‌های دفاعی. <i>دفاع هوافضایی</i>، دوره ۴ (شماره ۱)، صفحه ۲۶-۱.	

۱- مقدمه

سازه‌های ساندویچی با هسته‌های سبک‌وزن مانند فوم‌ها یا مواد لانه‌زنبوری به دلیل نسبت استحکام به وزن بالای خود، به طور فزاینده‌ای در سازه‌های دفاعی مانند پناهگاه‌ها، زره‌های وسایل نقلیه و سازه‌های مقاوم هم‌چون کلاه هلمت، در برابر انفجار مورد استفاده قرار می‌گیرند. فرکانس‌های طبیعی این سازه‌ها پارامترهای دینامیکی حیاتی هستند که رفتار آن‌ها در برابر بارگذاری‌های ضربه‌ای و ارتعاشی نظیر انفجار یا ضربات بالستیک را کنترل می‌کنند. در تحلیل‌های مرسوم، اغلب هسته به‌عنوان یک بخش صلب و بدون تغییر شکل در نظر گرفته می‌شود؛ این در حالی است که در واقعیت، هسته‌های سبک از انعطاف‌پذیری قابل توجهی برخوردارند و این انعطاف‌پذیری تأثیر عمیقی بر توزیع جرم، سفتی و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی کل سازه دارد. بررسی دقیق فرکانس‌های طبیعی سازه ساندویچی با در نظر گرفتن صریح انعطاف‌پذیری هسته، نه تنها منجر به پیش‌بینی واقع‌بینانه‌تر رفتار دینامیکی سازه می‌شود، بلکه امکان بهینه‌سازی طراحی را برای افزایش استحکام، جذب انرژی و ایمنی در برابر تهدیدات پویا فراهم می‌کند. پانل‌های ساندویچی شامل سه لایه، هسته مرکزی و لایه‌های بالا و پایین با ضخامت کم به عنوان رویه‌ها هستند. هسته دارای چگالی کم است که معمولاً از مواد لانه زنبوری، چوب‌های بالسا یا فوم‌های پلیمری ساخته می‌شوند و رویه‌ها از مواد با استحکام بالا مانند چند لایه‌های کامپوزیتی، فلزات و یا کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی ساخته می‌شوند. گشتاورهای خمشی توسط رویه‌ها و نیروهای برشی جانبی توسط هسته تحمل می‌شوند [۱].

ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی چند لایه بر اساس تئوری‌های مختلف تیر، توسط ردی [۲] مورد مطالعه قرار گرفت. یانگ و همکاران [۳] ارتعاشات آزاد تیرهای باریک هدفمند (FGM) را مورد بررسی و تحقیق قرار دادند و از مدل فنر چرخشی برای در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری مقطعی ناشی از ترک‌های لبه باز استفاده کردند. ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی ساندویچی با هسته مشبک کامپوزیتی با استفاده از روش نیمه تحلیلی گالرکین و المان محدود توسط رهنما و همکاران [۴] مورد مطالعه قرار گرفت. سیمسک و کوچاترک [۵] ویژگی‌های ارتعاش آزاد و انحرافات گذرای یک تیر FGM، با تکیه گاه ساده را که تحت یک بار هارمونیک متحرک متمرکز قرار دارد را با استفاده از روش معادله لاگرانژ، در چارچوب نظریه تیر اویلر-برنولی مورد مطالعه قرار دادند. تحلیل ارتعاشات آزاد سازه‌های ساندویچی لانه زنبوری با شرایط مرزی مختلف توسط صفایی و همکاران [۶] مورد بررسی واقع شد و عوامل اصلی مؤثر بر فرکانس‌های طبیعی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. فرکانس‌های طبیعی تیر ساندویچی با رویه‌های متخلخل مدرج تابعی و هسته آلومینیومی تقویت‌شده با صفحات گرافن با استفاده از تئوری جدید شبه سه‌بعدی تغییر شکل برشی توسط بلخوجا و همکاران [۷] مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته شد.

به طور کلی کامپوزیت‌های مشمول مواد نانو از دو فاز تشکیل شده‌اند، فاز اول زمینه یا ماتریس کامپوزیت است که می‌تواند از جنس پلیمر، فلز یا سرامیک باشد؛ فاز دوم ذراتی به عنوان تقویت‌کننده

در مقیاس نانو برای استحکام، مقاومت و غیره به فاز اول افزوده می‌شود [۸]. کی و همکاران [۹] ارتعاشات آزاد غیرخطی تیرهای نانوکامپوزیت هدفمند تقویت شده توسط نانولوله‌های کربنی تک جداره در چارچوب تئوری تیر تیموشنکو و رابطه جابجایی-کرنش نوع فون کارمان را ارائه کردند. بررسی تأثیرات تراکم نانولوله‌های کربنی بر رفتار فرکانس طبیعی صفحات نانوکامپوزیت هیبریدی توسط ابراهیمی و همکاران [۱۰] بررسی شد. پاسخ ارتعاشی نانولوله برن نیتريد تحت تاثیر تنش اولیه به صورت تحلیلی توسط حسینی و زندی [۱۱] مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت و به این نتیجه رسیدند که افزایش پارامتر غیرمحل و اثرات تنش اولیه منجر به کاهش فرکانس طبیعی می‌گردد. هسمتی و یاس [۱۲]، پاسخ دینامیکی تیرهای نانوکامپوزیت پلی استایرن هدفمند چند جداره نانولوله کربنی را که تحت بارهای چند حرکتی قرار داشتند را بر اساس تئوری تیر تیموشنکو بررسی کردند. وکیلی و همکاران [۱۳]، الگوریتمی را برای طرح‌های بهینه لوله‌های هدفمند تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی (CNT) برای انتقال سیال که تحت یک بار متحرک قرار داشتند، ارائه نمودند؛ میدان جابجایی دینامیکی سیستم بر اساس تئوری ردی و روش مربعات دیفرانسیل (DQM) محاسبه شدند.

در طراحی سازه‌های ساندویچی سعی بر استفاده از مواد سبک و انعطاف‌پذیر در هسته می‌باشد. مواد متخلخل به دلیل سبک وزنی و همچنین نسبت وزن به حجم کم، یک گزینه‌ی مناسب برای استفاده به عنوان هسته سازه‌های ساندویچی است و زیاد مورد توجه محققین قرار گرفته است. کیتی پورنچای و همکارانش [۱۴] اولین تلاش را برای مطالعه ویژگی‌های کماتش و ارتعاش آزاد تیرهای کامپوزیتی متخلخل FG تقویت شده توسط پلاکت‌های گرافن (GPLs) که به طور غیریکنواخت در ماتریس فلزی پراکنده شده‌اند، انجام دادند. میرجوادی و همکاران [۱۵]، پاسخ ارتعاش گذرای یک نانوتیر متخلخل FG تحت بارهای ضربه‌ای مختلف را بررسی کردند. لی و همکاران [۱۶] ارتعاشات آزاد تجربی و تئوری پوسته استوانه‌ای ساندویچی لانه زنبوری جدار نازک را مورد بررسی قرار دادند.

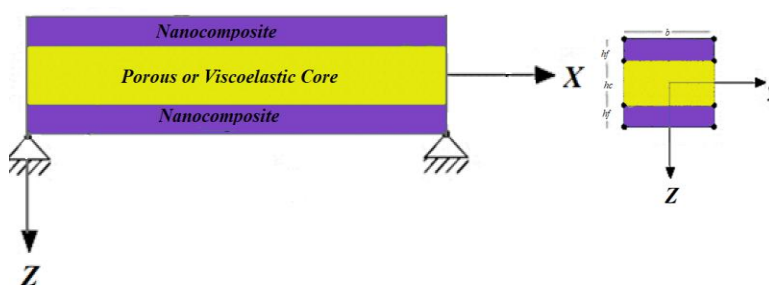
مواد ویسکوالاستیک دارای ویژگی الاستیک و ویسکوز هم‌زمان باهم می‌باشند. این مواد در برابر نیروهای خارجی، واکنش‌هایی بین رفتار مواد الاستیک و سیال ویسکوز از خود نشان می‌دهند. کرنش مواد الاستیک به صورت لحظه‌ای بوده و هنگامی که تحت بارگذاری قرار گرفته می‌شوند، بعد از برداشتن بار به حالت اولیه خود باز می‌گردند. در مقابل آن، مواد لزج در مقابل جریان برشی از خود مقاومت نشان می‌دهند و در هنگام بارگذاری به این مواد، کرنش آن‌ها با زمان تغییر پیدا می‌کند؛ در نتیجه، مواد ویسکوالاستیک ترکیبی از خواص بالا را دارا بوده و کرنش آن‌ها به زمان وابسته است [۱۷]. تحلیل دینامیکی ورقه‌های ساندویچی FRP با هسته‌ی ویسکوالاستیک PVC توسط مونیر و شنوی [۱۸] مورد بررسی و تجزیه قرار گرفت. معادلات حرکت ارتعاشی حاکم بر ورق‌ها با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای ردی حاصل شده است، آن‌ها با بهره‌گیری از اصل الاستیک-ویسکوالاستیک در شرایط پایا توانستند فرکانس‌های طبیعی و ضرایب اتلاف برای ورق ساندویچی را محاسبه کنند. ون و همکاران [۱۹]، به تحلیل دینامیکی تیر ساندویچی سه لایه با هسته ویسکوالاستیک تحت بارگذاری دینامیکی خارجی با استفاده از روش المان محدود پرداختند. رفتار

ارتعاشات آزاد و اجباری تیر ویسکوالاستیک با استفاده از دو روش کلون-ویت و وابسته به فرکانس، توسط تیموری و همکاران [۲۰] مورد بحث و مطالعه قرار گرفت و به این نتیجه رسیدند که روش وابسته به فرکانس دارای کاهش لگاریتمی کمتری نسبت به روش کلون-ویت است. این تحقیق با پر کردن شکاف بین مدل سازی ساده انگارانه و رفتار واقعی هسته، گامی ضروری در جهت توسعه سازه های دفاعی نسل آینده با قابلیت تحمل بارهای دینامیکی شدید و محافظت برتر است. در این پژوهش فرکانس های طبیعی سازه های ساندویچی با رویه های نانوکامپوزیتی و با تمرکز بر مقایسه دو هسته متخلخل و ویسکوالاستیک، مورد بررسی واقع شده است. با بکارگیری اصل همیلتون و بر اساس تئوری سه لایه تیر ساندویچی، معادلات حاکم بر سیستم بدست می آیند. برای حل معادلات تعادل از روش های تحلیلی ناویر استفاده شده است. یکی از اساسی ترین مراحل کار، عرضه درست نتایج است بنابراین پس از بررسی صحت نتایج با مقالات چاپ شده، نتایج مربوط به پژوهش حاضر به صورت جداول و نمودارها ارائه و به تجزیه و تحلیلی فیزیکی آنها پرداخته شده است.

۲- مدل سازی و بدست آوردن معادلات حاکم

سازه ساندویچی متشکل از رویه های نانوکامپوزیتی و هسته متخلخل و ویسکوالاستیک، در دستگاه مختصات (x, y, z) بر روی صفحه میانی هسته در نظر گرفته شده است. مطابق شکل ۱ طول، پهنا، ضخامت هسته و ضخامت لایه نانوکامپوزیتی به ترتیب با b, L, h_c و h_f نشان داده شده است. فرضیات مساله حاکم به شرح زیر است:

- از عوامل غیرخطی در معادلات صرف نظر شده است.
- رویه ها بصورت کامل به هسته چسبیده شده اند.
- از اثرات حرارتی در حل مساله چشم پوشی شده است.



شکل ۱: شماتیک سازه ساندویچی متشکل از رویه های نانوکامپوزیتی و هسته متخلخل و یا ویسکوالاستیک

۲-۱- تئوری سه لایه تیر ساندویچی

برای تحلیل ارتعاشات آزاد سازه مدنظر از تئوری سه لایه تیر ساندویچی استفاده شده است، که در آن رویه های تیر ساندویچی با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و هسته با استفاده از تئوری مرتبه بالای

فراستیک مدل سازی شده است. میدان جابه جایی برای رویه ها بصورت زیر در نظر گرفته می شود
[۲۱]:

$$\begin{aligned} U_i(x, z_i, t) &= u_i(x, t) + z_i \phi_i(x, t) \\ W_i(x, z_i, t) &= w_i(x, t) \end{aligned} \quad i = t, b \quad (1)$$

در رابطه بالا اندیس های t و b به ترتیب برای تفکیک رویه های بالایی و پایینی می باشد. جابجایی طولی و عرضی تیر ساندویچی به ترتیب با U و W نشان داده شده است. همچنین u, w, ϕ جابجایی های طولی، عرضی صفحه میانی و اثرات چرخش رویه ها را نشان می دهند.
میدان جابه جایی برای هسته طبق تئوری مرتبه بالای فراستیک بصورت زیر در نظر گرفته می گردد
[۲۲]:

$$\begin{aligned} U_c(x, z_c, t) &= u_0(x, t) + z_c u_1(x, t) + z_c^2 u_2(x, t) + z_c^3 u_3(x, t) \\ W_c(x, z_c, t) &= w_0(x, t) + z_c w_1(x, t) + z_c^2 w_2(x, t) \end{aligned} \quad (2)$$

در روابط بالا، U_c و W_c به ترتیب مربوط به جابجایی های طولی و عرضی هسته می باشند. همچنین u_0, w_0, u_1 به ترتیب جابجایی طولی، عرضی در صفحه میانی و اثرات چرخش هسته را نشان می دهند. علاوه بر این، متغیرهای u_2, u_3, w_1, w_2 پارامترهای مجهولی هستند که با اعمال شرایط پیوستگی جابجایی در سطح مشترک بین صفحات رویه و هسته تعیین می شوند. شرایط پیوستگی در سطح مشترک بین صفحات رویه و هسته به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\begin{aligned} U_c\left(x, \frac{h_c}{2}, t\right) &= U_b\left(x, -\frac{h_b}{2}, t\right), U_c\left(x, -\frac{h_c}{2}, t\right) = U_t\left(x, \frac{h_t}{2}, t\right) \\ W_c\left(x, \frac{h_c}{2}, t\right) &= W_b\left(x, -\frac{h_b}{2}, t\right), W_c\left(x, -\frac{h_c}{2}, t\right) = W_t\left(x, \frac{h_t}{2}, t\right) \end{aligned} \quad (3)$$

میدان جابجایی برای هسته با جایگذاری روابط فوق در میدان های جابجایی ۱ و ۳ و حل معادلات حاصل بصورت زیر تعریف می گردد:

$$\begin{aligned} U_c(x, z_c, t) &= f_0(z_c)u_0(x, t) + f_3(z_c)u_1(x, t) + f_4(z_c)u_b(x, t) \\ &+ f_5(z_c)u_t(x, t) + f_6(z_c)\phi_b(x, t) + f_7(z_c)\phi_t(x, t) \\ W_c(x, z_c, t) &= f_0(z_c)w_0(x, t) + f_1(z_c)w_b(x, t) + f_2(z_c)w_t(x, t) \end{aligned} \quad (4)$$

که

$$\begin{aligned}
 f_0(z_c) &= \left[1 - \left(\frac{2z_c}{h_c} \right)^2 \right], f_1(z_c) = \frac{z_c}{h_c} \left(1 + \frac{2z_c}{h_c} \right), f_2(z_c) = -\frac{z_c}{h_c} \left(1 - \frac{2z_c}{h_c} \right) \\
 f_3(z_c) &= z_c f_0(z_c), f_4(z_c) = 2 \left(\frac{z_c}{h_c} \right)^2 \left(1 + \frac{2z_c}{h_c} \right), f_5(z_c) = 2 \left(\frac{z_c}{h_c} \right)^2 \left(1 - \frac{2z_c}{h_c} \right) \\
 f_6(z_c) &= -\frac{h_b}{2} f_4(z_c), f_7(z_c) = \frac{h_t}{2} f_5(z_c)
 \end{aligned} \quad (5)$$

با استفاده از روابط کرنش-جابجایی، میدان‌های کرنش برای صفحات سازه ساندویچی به صورت زیر بیان می‌شوند [۲۰]:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^{(i)} &= \frac{\partial u_i}{\partial x} + z_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \quad i = t, b \\
 \gamma_{xz}^{(i)} &= \phi_i + \frac{\partial w_i}{\partial x}
 \end{aligned} \quad (6)$$

روابط کرنش هسته سازه ساندویچی نیز به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^{(c)} &= f_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + f_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} + f_4 \frac{\partial u_b}{\partial x} + f_5 \frac{\partial u_t}{\partial x} + f_6 \frac{\partial \phi_b}{\partial x} + f_7 \frac{\partial \phi_t}{\partial x} \\
 \varepsilon_{zz}^{(c)} &= g_0 w_0 + g_1 w_b + g_2 w_t \\
 \gamma_{xz}^{(c)} &= g_0 u_0 + g_3 u_1 + g_4 u_b + g_5 u_t + g_6 \phi_b + g_7 \phi_t \\
 &+ f_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + f_1 \frac{\partial w_b}{\partial x} + f_2 \frac{\partial w_t}{\partial x}
 \end{aligned} \quad (7)$$

که در رابطه بالا داریم:

$$g_i = \frac{df_i}{dz_c}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 7 \quad (8)$$

۲-۲- معادلات ساختاری روبه‌های سازه ساندویچی

معادلات ساختاری خطی لایه نانوکامپوزیتی برای تیر ساندویچی به صورت روابط (۹) بیان می‌شود [۲۳]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(i)} \\ \sigma_{xz}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(f)} & 0 \\ 0 & k_s Q_{55}^{(f)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(i)} \\ \gamma_{xz}^{(i)} \end{Bmatrix} \quad i = t, b \quad (9)$$

σ_{ij} ، ε_{ij} و Q_{ij} به ترتیب تانسور تنش، کرنش و ماتریس سفتی لایه نانوکامپوزیتی را نشان می دهند و همچنین ضریب تصحیح برشی تئوری تیموشنکو نیز با k_s نشان داده شده است. ضرایب سختی رویه های نانوکامپوزیتی و ضریب تصحیح برشی به صورت زیر تعریف می گردد:

$$Q_{11}^{(f)} = E^f \quad Q_{55}^{(f)} = G^f \quad k_s = \frac{5}{6} \quad (10)$$

مدول یانگ و مدول برشی لایه های نانوکامپوزیتی به ترتیب E^f و G^f می باشد که با استفاده از روابط زیر تعیین می شوند [۲۳]:

$$E^f = \eta_1 V_{CNT} E^{CNT} + V_m E^m$$

$$\frac{\eta_2}{E^f} = \frac{V_{CNT}}{E^{CNT}} + \frac{V_m}{E^m} \quad (11)$$

$$\frac{\eta_3}{G^f} = \frac{V_{CNT}}{G^{CNT}} + \frac{V_m}{G^m}$$

که در رابطه بالا، η_i ضرایب بازدهی نانو لوله های کربنی، E^{CNT} و G^{CNT} مدول یانگ و مدول برشی نانولوله های کربنی، E^m و G^m مدول یانگ و مدول برشی ماتریس، V_{CNT} و V_m درصد حجمی ماتریس و نانولوله های کربنی می باشند. در جدول ۱، ضرایب بازدهی انواع کسر حجمی نانولوله های کربنی نشان داده شده است [۲۴].

جدول ۱: ضرایب بازدهی برای کسر حجمی های مختلف نانولوله های کربنی

کسر حجمی نانولوله های کربنی	η_1	η_2	η_3
۰/۱۲	۰/۱۳۷	۱/۰۲۲	۰/۷۱۵۴
۰/۱۷	۰/۱۴۲	۱/۶۲۶	۱/۱۳۸

با جایگذاری رابطه ۶ در رابطه ۹، روابط تنش-جابجایی برای رویه های سازه ساندویچی به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\sigma_{xx}^{(i)} = Q_{11}^{(f)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + z_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) \quad i = t, b$$

$$\sigma_{xz}^{(i)} = k_s Q_{55}^{(f)} \left(\phi_i + \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) \quad (12)$$

۲-۳- معادلات ساختاری هسته متخلخل

معادلات ساختاری هسته متخلخل برای سازه ساندویچی به صورت زیر تعریف می شود [۲۵]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(c)} \\ \sigma_{zz}^{(c)} \\ \sigma_{xz}^{(c)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(c)} & Q_{13}^{(c)} & 0 \\ Q_{13}^{(c)} & Q_{33}^{(c)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{55}^{(c)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(c)} \\ \varepsilon_{zz}^{(c)} \\ \gamma_{xz}^{(c)} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Q_{ij}^c ماتریس سفتی هسته متخلخل می باشد که بصورت زیر تعریف می گردند:

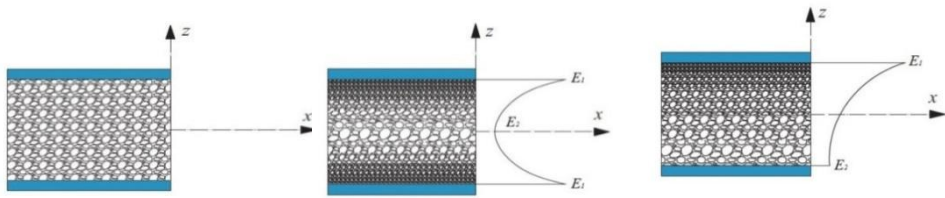
$$\begin{aligned} Q_{11}^{(c)} &= Q_{33}^{(c)} = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \\ Q_{13}^{(c)} &= \nu_c Q_{11}^{(c)} \\ Q_{55}^{(c)} &= G_c = \frac{E_c}{2(1+\nu_c)} = \xi Q_{11}^{(c)}, \quad \xi = \frac{1-\nu_c}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

معادلات مربوط به مدول یانگ و چگالی برای توزیع های مختلف هسته متخلخل به صورت معادلات زیر بیان می شوند که در شکل ۲ شماتیک انواع توزیع تخلخل شامل یکنواخت و غیریکنواخت نشان داده شده است [۲۵].

$$\begin{aligned} \text{Uniform distribution:} & \begin{cases} E^c = E_1(1-e_0\alpha) \\ \rho^c = \rho_1(1-e_m\alpha)^{0.5} \end{cases} \\ \text{Symmetric distribution:} & \begin{cases} E^c = E_1(1-e_0 \cos(\pi\xi)) \\ \rho^c = \rho_1(1-e_m \cos(\pi\xi)) \end{cases} \\ \text{Non-uniform distribution:} & \begin{cases} E^c = E_1(1-e_0 \cos(\frac{\pi\xi}{2} + \frac{\pi}{4})) \\ \rho^c = \rho_1(1-e_m \cos(\frac{\pi\xi}{2} + \frac{\pi}{4})) \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

در معادلات بالا E_1 ، ρ_1 و e_0 به ترتیب مقادیر بیشینه مدول یانگ، چگالی جرمی و ضریب تخلخل می باشد. همچنین در معادله (۶) داریم:

$$\begin{aligned} 0 \leq e_0 < 1, \quad 0 \leq e_m < 1 \\ e_m &= 1 - \sqrt{1-e_0} \\ \alpha &= \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{1-e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2, \quad \xi = \frac{z}{h_c} \end{aligned} \quad (16)$$



الف

ب

ج

شکل ۲: شماتیک انواع توزیع تخلخل: الف) توزیع یکنواخت، ب) توزیع متقارن، توزیع نامتقارن

با جایگذاری رابطه ۷ در رابطه ۱۳، روابط تنش-جابجایی برای هسته متخلخل به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(c)} &= \left(Q_{11}^{(c)} \left(f_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + f_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} + f_4 \frac{\partial u_b}{\partial x} + f_5 \frac{\partial u_t}{\partial x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f_6 \frac{\partial \phi_b}{\partial x} + f_7 \frac{\partial \phi_t}{\partial x} \right) + Q_{13}^{(c)} (g_0 w_0 + g_1 w_b + g_2 w_t) \right) \\ \sigma_{zz}^{(c)} &= \left(Q_{13}^{(c)} \left(f_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + f_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} + f_4 \frac{\partial u_b}{\partial x} + f_5 \frac{\partial u_t}{\partial x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f_6 \frac{\partial \phi_b}{\partial x} + f_7 \frac{\partial \phi_t}{\partial x} \right) + Q_{33}^{(c)} (g_0 w_0 + g_1 w_b + g_2 w_t) \right) \\ \sigma_{xz}^{(c)} &= Q_{55}^{(c)} \left(g_0 u_0 + g_3 u_1 + g_4 u_b + g_5 u_t + g_6 \phi_b + g_7 \phi_t \right. \\ &\quad \left. + f_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + f_1 \frac{\partial w_b}{\partial x} + f_2 \frac{\partial w_t}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (17)$$

۲-۴- معادلات ساختاری هسته ویسکوالاستیک

معادلات ساختاری هسته ویسکوالاستیک طبق مدل کلون-ویت برای تیر ساندویچی به صورت زیر بیان می گردد [۲۰]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(c)} \\ \sigma_{zz}^{(c)} \\ \sigma_{xz}^{(c)} \end{Bmatrix} = \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} Q_{11}^{(c)} & Q_{13}^{(c)} & 0 \\ Q_{13}^{(c)} & Q_{33}^{(c)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{55}^{(c)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(c)} \\ \varepsilon_{zz}^{(c)} \\ \gamma_{xz}^{(c)} \end{Bmatrix}\quad (18)$$

ضرایب سفتی و ضریب اتلاف هسته ویسکوالاستیک به ترتیب با Q_{ij}^c و η نشان داده شده است. با جاگذاری رابطه ۷ در رابطه ۱۸، روابط تنش-جابجایی برای هسته ویسکوالاستیک به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(c)} &= \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(Q_{11}^{(c)} \left(f_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + f_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} + f_4 \frac{\partial u_b}{\partial x} + f_5 \frac{\partial u_t}{\partial x} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + f_6 \frac{\partial \phi_b}{\partial x} + f_7 \frac{\partial \phi_t}{\partial x} \right) + Q_{13}^{(c)} (g_0 w_0 + g_1 w_b + g_2 w_t) \right) \\
\sigma_{zz}^{(c)} &= \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(Q_{13}^{(c)} \left(f_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + f_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} + f_4 \frac{\partial u_b}{\partial x} + f_5 \frac{\partial u_t}{\partial x} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + f_6 \frac{\partial \phi_b}{\partial x} + f_7 \frac{\partial \phi_t}{\partial x} \right) + Q_{33}^{(c)} (g_0 w_0 + g_1 w_b + g_2 w_t) \right) \\
\sigma_{xz}^{(c)} &= \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) Q_{55}^{(c)} \left(g_0 u_0 + g_3 u_1 + g_4 u_b + g_5 u_t + g_6 \phi_b + g_7 \phi_t \right. \\
&\quad \left. + f_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + f_1 \frac{\partial w_b}{\partial x} + f_2 \frac{\partial w_t}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{۱۹}$$

۲-۵- معادلات حاکم بر سازه ساندویچی

معادلات حاکم بر سازه ساندویچی با هسته متخلخل و ویسکوالاستیک و رویه‌های نانوکامپوزیتی با اعمال اصل همیلتون مطابق رابطه زیر بدست می‌آیند [۲۰]:

$$\int_0^t \delta(U - T) dt = 0 \tag{۲۰}$$

که در رابطه بالا U و T به ترتیب انرژی جنبشی و انرژی کرنشی سازه را نشان می‌دهد.

انرژی جنبشی سیستم بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \left[\iiint_{V_c} \rho_c \left[\left(\frac{\partial U_c}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_c}{\partial t} \right)^2 \right] dV_c \right. \\
&\quad \left. + \iiint_{V_b} \rho_f \left[\left(\frac{\partial U_b}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_b}{\partial t} \right)^2 \right] dV_b + \iiint_{V_t} \rho_f \left[\left(\frac{\partial U_t}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_t}{\partial t} \right)^2 \right] dV_t \right]
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

با جاگذاری میدان‌های جابه‌جایی گفته شده برای هسته و رویه‌های بالا و پایین، تغییرات انرژی جنبشی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & +J_{022} \frac{\partial w_t}{\partial t} \frac{\partial \delta w_t}{\partial t} \\
 & +J_{266} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_b}{\partial t} + J_{277} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_t}{\partial t} + J_{00}^{(c)} \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + J_{33}^{(c)} \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial \delta u_1}{\partial t} \\
 & + J_{00}^{(c)} \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} + J_{46}^{(c)} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \frac{\partial \delta u_b}{\partial t} + J_{46}^{(c)} \frac{\partial u_b}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_b}{\partial t} + J_{57}^{(c)} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \frac{\partial \delta u_t}{\partial t} \\
 & + J_{57}^{(c)} \frac{\partial u_t}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_t}{\partial t} + J_{04}^{(c)} \frac{\partial u_b}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + J_{04}^{(c)} \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_b}{\partial t} + J_{05}^{(c)} \frac{\partial u_t}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} \\
 & + J_{05}^{(c)} \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_t}{\partial t} + J_{06}^{(c)} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + J_{06}^{(c)} \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_b}{\partial t} + J_{07}^{(c)} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} \\
 \delta T = b \int_0^L & + J_{07}^{(c)} \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_t}{\partial t} + J_{34}^{(c)} \frac{\partial u_b}{\partial t} \frac{\partial \delta u_1}{\partial t} + J_{34}^{(c)} \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial \delta u_b}{\partial t} + J_{35}^{(c)} \frac{\partial u_t}{\partial t} \frac{\partial \delta u_1}{\partial t} \\
 & + J_{35}^{(c)} \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial \delta u_t}{\partial t} + J_{36}^{(c)} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \frac{\partial \delta u_1}{\partial t} + J_{36}^{(c)} \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_b}{\partial t} + J_{37}^{(c)} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \frac{\partial \delta u_1}{\partial t} \\
 & + J_{37}^{(c)} \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_t}{\partial t} + J_{45}^{(c)} \frac{\partial u_t}{\partial t} \frac{\partial \delta u_b}{\partial t} + J_{45}^{(c)} \frac{\partial u_b}{\partial t} \frac{\partial \delta u_t}{\partial t} + J_{47}^{(c)} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \frac{\partial \delta u_b}{\partial t} \\
 & + J_{47}^{(c)} \frac{\partial u_b}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_t}{\partial t} + J_{56}^{(c)} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \frac{\partial \delta u_t}{\partial t} + J_{56}^{(c)} \frac{\partial u_t}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_b}{\partial t} + J_{67}^{(c)} \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_b}{\partial t} \\
 & + J_{67}^{(c)} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi_t}{\partial t} + J_{01}^{(c)} \frac{\partial w_b}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} + J_{01}^{(c)} \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_b}{\partial t} \\
 & + J_{02}^{(c)} \frac{\partial w_t}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} + J_{02}^{(c)} \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_t}{\partial t} + J_{12}^{(c)} \frac{\partial w_t}{\partial t} \frac{\partial \delta w_b}{\partial t} + J_{12}^{(c)} \frac{\partial w_b}{\partial t} \frac{\partial \delta w_t}{\partial t} \Big) dx \quad (22)
 \end{aligned}$$

که در رابطه بالا ثابت بصورت زیر نوشته می شوند:

$$\begin{aligned}
 J_{011} &= J_0^{(b)} + J_{11}^{(c)} & J_{022} &= J_0^{(t)} + J_{22}^{(c)} \\
 J_{044} &= J_0^{(b)} + J_{44}^{(c)} & J_{055} &= J_0^{(t)} + J_{55}^{(c)} \\
 J_{266} &= J_2^{(b)} + J_{66}^{(c)} & J_{277} &= J_2^{(t)} + J_{77}^{(c)} \\
 J_n^{(i)} &= \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \rho_i z_i^n dz_i \quad i=t,b, \quad n=0,1,2 \\
 J_{nm}^{(c)} &= \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \rho_c f_n(z_c) f_m(z_c) dz_c \quad n,m=0,1,2,\dots,7
 \end{aligned} \quad (23)$$

انرژی کرنشی تیر ساندویچی بصورت زیر تعریف می شود:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \left(\sigma_{xx}^{(c)} \varepsilon_{xx}^{(c)} + \sigma_{zz}^{(c)} \varepsilon_{zz}^{(c)} + \sigma_{xz}^{(c)} \gamma_{xz}^{(c)} \right) dV_c + \quad (24)$$

$$\frac{1}{2} \iiint_b \left(\sigma_{xx}^{(b)} \varepsilon_{xx}^{(b)} + \sigma_{xz}^{(b)} \gamma_{xz}^{(b)} \right) dV_b + \frac{1}{2} \iiint_t \left(\sigma_{xx}^{(t)} \varepsilon_{xx}^{(t)} + \sigma_{xz}^{(t)} \gamma_{xz}^{(t)} \right) dV_t$$

با استفاده از روابط ۶ و ۷ و همچنین روابط ۱۲، ۱۷ و ۱۹، تغییرات انرژی کرنشی بصورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\delta U = b \int_0^L \left(P_{xx}^{(0)} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + P_{xx}^{(3)} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x} + P_{xx}^{(4)} \frac{\partial \delta u_b}{\partial x} + P_{xx}^{(5)} \frac{\partial \delta u_t}{\partial x} \right. \\ + P_{xx}^{(6)} \frac{\partial \delta \phi_b}{\partial x} + P_{xx}^{(7)} \frac{\partial \delta \phi_t}{\partial x} + P_{zz}^{(0)} \delta w_0 + P_{zz}^{(1)} \delta w_b + P_{zz}^{(2)} \delta w_t + S_{xz}^{(0)} \delta u_0 \\ + S_{xz}^{(3)} \delta u_1 + S_{xz}^{(4)} \delta u_b + S_{xz}^{(5)} \delta u_t + S_{xz}^{(6)} \delta \phi_b + S_{xz}^{(7)} \delta \phi_t + R_{xz}^{(0)} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \\ + R_{xz}^{(1)} \frac{\partial \delta w_b}{\partial x} + R_{xz}^{(2)} \frac{\partial \delta w_t}{\partial x} + N_{xx}^{(b)} \frac{\partial \delta u_b}{\partial x} + M_{xx}^{(b)} \frac{\partial \delta \phi_b}{\partial x} + Q_{xz}^{(b)} \delta \phi_b \\ \left. + Q_{xz}^{(b)} \frac{\partial \delta w_b}{\partial x} + N_{xx}^{(t)} \frac{\partial \delta u_t}{\partial x} + M_{xx}^{(t)} \frac{\partial \delta \phi_t}{\partial x} + Q_{xz}^{(t)} \delta \phi_t + Q_{xz}^{(t)} \frac{\partial \delta w_t}{\partial x} \right) dx \quad (25)$$

که در روابط بالا داریم:

$$P_{xx}^{(n)} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{xx}^{(c)} f_n(z_c) dz_c \quad P_{zz}^{(n)} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{zz}^{(c)} g_n(z_c) dz_c \\ R_{xz}^{(n)} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{xz}^{(c)} f_n(z_c) dz_c \quad S_{xz}^{(n)} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{xz}^{(c)} g_n(z_c) dz_c \quad (26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{xx}^{(i)} \\ M_{xx}^{(i)} \end{array} \right\} = \frac{h_i}{2} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}^{(i)} \\ \sigma_{xx}^{(i)} \end{array} \right\} \frac{1}{z_i} dz_i \quad Q_{xz}^{(i)} = \frac{h_i}{2} \sigma_{xz}^{(i)} dz_i, \quad i \neq b$$

با جاگذاری روابط ۲۲ و ۲۵ در اصل همیلتون، معادلات حاکم بر سازه ساندویچی بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\delta u_b : \frac{\partial N_{xx}^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xx}^{(4)}}{\partial x} - S_{xz}^{(4)} - J_{044} \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} - J_{45}^{(c)} \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} \\ - J_{46}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial t^2} - J_{47}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial t^2} - J_{04}^{(c)} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - J_{34}^{(c)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \quad (27)$$

$\delta u_t :$

$$\frac{\partial N_{xx}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xx}^{(5)}}{\partial x} - S_{xz}^{(5)} - J_{45}^{(c)} \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} - J_{055} \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} - J_{56}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial t^2} - J_{57}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial t^2} - J_{05}^{(c)} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - J_{35}^{(c)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \quad (28)$$

$\delta w_b :$

$$\frac{\partial Q_{xz}^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial R_{xz}^{(1)}}{\partial x} - P_{zz}^{(1)} - J_{011} \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - J_{12}^{(c)} \frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2} - J_{01}^{(c)} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0 \quad (29)$$

$\delta w_t :$

$$\frac{\partial Q_{xz}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial R_{xz}^{(2)}}{\partial x} - P_{zz}^{(2)} - J_{12}^{(c)} \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - J_{022} \frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2} - J_{02}^{(c)} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0 \quad (30)$$

$\delta \phi_b :$

$$\frac{\partial M_{xx}^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xx}^{(6)}}{\partial x} - Q_{xz}^{(b)} - S_{xz}^{(6)} - J_{46}^{(c)} \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} - J_{56}^{(c)} \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} - J_{266} \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial t^2} - J_{67}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial t^2} - J_{06}^{(c)} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - J_{36}^{(c)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \quad (31)$$

$\delta \phi_t :$

$$\frac{\partial M_{xx}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xx}^{(7)}}{\partial x} - Q_{xz}^{(t)} - S_{xz}^{(7)} - J_{57}^{(c)} \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} - J_{47}^{(c)} \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} - J_{67}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial t^2} - J_{277} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial t^2} - J_{07}^{(c)} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - J_{37}^{(c)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \quad (32)$$

$\delta u_0 :$

$$\frac{\partial P_{xx}^{(0)}}{\partial x} - S_{xz}^{(0)} - J_{04}^{(c)} \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} - J_{05}^{(c)} \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} - J_{06}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial t^2} - J_{07}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial t^2} - J_{00}^{(c)} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0 \quad (33)$$

$$\delta u_1 : \frac{\partial P_{xx}^{(3)}}{\partial x} - S_{xz}^{(3)} - J_{34}^{(c)} \frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} - J_{35}^{(c)} \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} - J_{36}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial t^2} - J_{37}^{(c)} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial t^2} - J_{33}^{(c)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \quad (34)$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial R_{xz}^{(0)}}{\partial x} - P_{zz}^{(0)} - J_{01}^{(c)} \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - J_{02}^{(c)} \frac{\partial^2 w_t}{\partial t^2} - J_{00}^{(c)} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0 \quad (35)$$

۳- حل نیمه تحلیلی ناویر

در تحقیق حاضر شرایط مرزی سیستم در دو طرف تیر به صورت تکیه گاه ساده می باشد که به منظور گسسته سازی دستگاه معادلات دیفرانسیلی می توان از روش ناویر در حوزه ی مکان استفاده کرد. در این روش متغیرها به صورت سری در نظر گرفته می شوند به نحوی که بتوانند شرایط مرزی را تأمین کنند. پس از جایگذاری سری ها در دستگاه معادلات، معادلات دیفرانسیلی به معادلات جبری تابع زمان تبدیل می شوند.

متغیرهای میدان جابجایی به نحوی که بتوانند شرایط مرزی را تأمین کنند، به صورت سری های زیر در نظر گرفته می شوند:

$$\begin{aligned} u_b(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(b)}(t) \cos(\alpha_m x), & u_t(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(t)}(t) \cos(\alpha_m x) \\ w_b(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m^{(b)}(t) \sin(\alpha_m x), & w_t(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m^{(t)}(t) \sin(\alpha_m x) \\ \phi_b(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m^{(b)}(t) \cos(\alpha_m x), & \phi_t(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m^{(t)}(t) \cos(\alpha_m x) \\ u_0(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(0)}(t) \cos(\alpha_m x), & u_1(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(1)}(t) \cos(\alpha_m x) \\ w_0(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m^{(0)}(t) \sin(\alpha_m x) \end{aligned} \quad (36)$$

که

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{L} \quad (37)$$

با جاگذاری روابط ۳۴ در معادلات ۲۵ تا ۳۳، فرم بسته معادلات دیفرانسیل بصورت زیر بیان می شود:

$$[M]_{9N \times 9N} \{\ddot{x}\}_{9N \times 1} + [K]_{9N \times 9N} \{x\}_{9N \times 1} = 0 \quad (38)$$

در رابطه بالا $[M]$ و $[K]$ به ترتیب ماتریس جرم و ماتریس سفتی سازه مدنظر می باشد.

با حل رابطه ۳۴، فرکانس های طبیعی سازه ساندویچی بدست می آید.

۴- بحث و نتایج

در این بخش به بررسی و ارزیابی نتایج عددی پرداخته شده است. هدف از این بخش بررسی تأثیر عوامل مختلف بر فرکانس های طبیعی سازه ساندویچی با هسته های متخلخل و ویسکوالاستیک می باشد. مشخصات هندسی تیر ساندویچی با هسته متخلخل و رویه های نانولوله کربنی در جدول ۲

ارائه شده است. علاوه بر این، جداول ۳ و ۴ به ترتیب، خصوصیات مکانیکی هسته متخلخل و رویه‌های نانوکامپوزیتی را ارائه می‌دهند.

جدول ۲: مشخصات هندسی سازه ساندویچی

$\frac{h_c}{h}$	$\frac{h}{L}$	$\frac{b}{L}$	L (m)
۰/۸	۰/۰۴	۰/۰۵	۲

جدول ۳: خصوصیات مکانیکی هسته‌ی متخلخل تیر ساندویچی [۲۵]

e_0	ν_c	ρ ($\frac{Kg}{m^3}$)	E_c (GPa)
۰/۲۵	۰/۲۵	۲۷۰۰	۶۰

جدول ۴: خواص فیزیکی رویه‌های نانوکامپوزیتی [۲۱]

Epoxy	E_m (GPa)	۲/۵
	ρ ($\frac{Kg}{m^3}$)	۱۱۵۰
	ν_m	۰/۳۴
CNT	E^{CNT} (Tpa)	۵/۶۴
	G^{CNT} (Tpa)	۱/۹۴
	ρ^{CNT} ($\frac{Kg}{m^3}$)	۱۴۰۰

در نظر داریم که فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی در این تحقیق، طبق رابطه زیر بی‌بعد شده‌اند.

$$\lambda = \omega L \sqrt{\frac{\rho m}{E_m}} \quad (39)$$

۴-۱- اعتبارسنجی

به منظور صحت‌سنجی پژوهش حاضر، یک سازه (تیر) ساندویچی به طول ۰/۳ متر و با هسته‌ی الاستیک و رویه‌های همگن همسان‌گرد در نظر گرفته شده است. مشخصات فیزیکی و هندسی سازه ساندویچی مورد استفاده در اعتبارسنجی حاضر، در جدول ۵ ارائه شده است. فرکانس‌های طبیعی تیر بر حسب هرتز در جدول ۶ در کنار مقادیر گزارش شده توسط یانگ و کیائو [۲۶] ارائه شده است. همان‌گونه که طبق نتایج مشخص است، یافته‌های تحلیلی مرجع [۲۶] کاملاً با نتایج مدل بررسی شده در این مطالعه مطابقت دارد که می‌توان نتیجه گرفت مدل‌سازی در نظر گرفته شده در مقاله حاضر کاملاً درست و قابل اطمینان می‌باشد.

جدول ۵: مشخصات فیزیکی و هندسی تیر ساندویچی

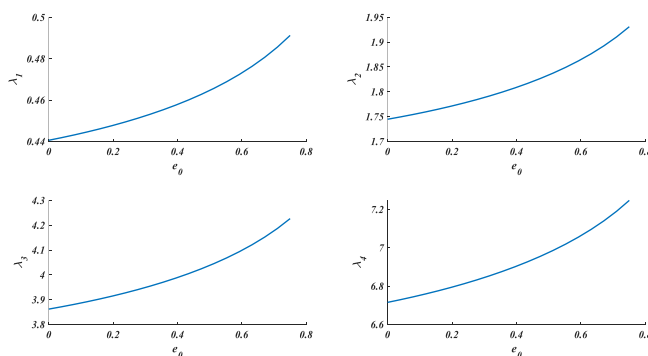
مشخصات فیزیکی	رویه‌ها	هسته
$E(Mpa)$	۵۰	۳۶۰۰۰
$\rho(\frac{Kg}{m^3})$	۵۲/۰۶	۴۴۰۰
ν	۰/۳	۰/۲۵
$h(mm)$	۲۱	۲۰

جدول ۶: مقایسه فرکانس‌های طبیعی تحقیق حاضر و مقاله یانگ و کیائو [۲۶]

فرکانس‌های طبیعی	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
تحقیق حاضر	۳۲۶/۸۲	۸۲۷/۰۶	۱۳۱۴/۳	۱۷۸۸/۰۸	۲۲۵۲/۱۶
یانگ و کیائو [۲۶]	۳۲۵/۹۸	۸۲۴/۹۶	۹۰ ۱۳۰۸/	۱۷۷۶/۱۱	۲۲۲۹/۶۲

۴-۲- نتایج عددی مربوط به هسته متخلخل

در شکل ۳ اثر ضریب تخلخل هسته بر فرکانس‌های طبیعی چهار مد اول سیستم بررسی شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش ضریب تخلخل هسته، حفره‌ها بزرگتر می‌شوند و سختی تیر کاهش می‌یابد، از طرفی جرم تیر کاهش می‌یابد و اثر این کاهش جرم تیر نسبت به کاهش سختی تیر بیشتر می‌باشد، بنابراین فرکانس طبیعی سازه ساندویچی افزایش می‌یابد.



شکل ۳: تاثیر ضریب تخلخل بر فرکانس‌های طبیعی سازه ساندویچی

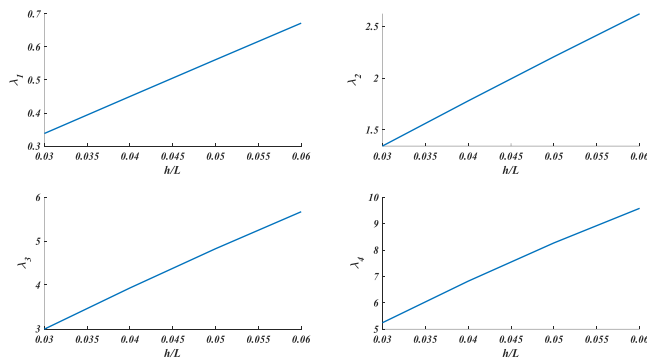
در جدول ۷ اثر الگوی توزیع حفره‌های هسته بر فرکانس‌های طبیعی چهار مد اول سیستم بررسی شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، بیشترین فرکانس مربوط به توزیع متقارن تخلخل می‌باشد و دلیل آن این است که، در این توزیع حفره‌های نزدیک تار خنثی، درشت‌تر هستند و هرچه از تار خنثی فاصله می‌گیرند ریزتر می‌شوند، چون نزدیک تار خنثی تنش و کرنش کم است، حفره‌ها اگر درشت

هم باشند تاثیری در کم شدن سفتی تیر ندارند، مانند تیر آهن‌های لانه زنبوری که بیشترین سفتی را دارند.

جدول ۷: تاثیر الگوی توزیع حفره‌ها بر فرکانس‌های طبیعی سازه ساندویچی

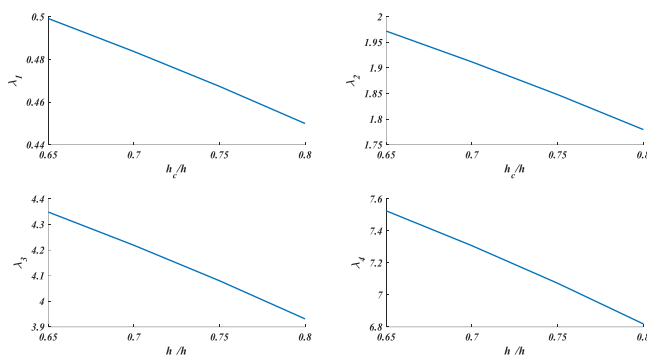
فرکانس‌های طبیعی	توزیع یکنواخت	توزیع متقارن	توزیع نامتقارن
λ_1	۰/۴۴۳۲	۰/۴۵۰۰	۰/۴۴۴۴
λ_2	۱/۷۵۳۹	۱/۷۷۹۶	۱/۷۵۸۸
λ_3	۳/۸۷۸۴	۳/۹۳۱۴	۳/۸۸۸۷
λ_4	۶/۷۳۵۴	۶/۸۱۸۷	۶/۷۵۲۰

در شکل ۴ اثر نسبت ضخامت به طول سازه (تیر) بر فرکانس‌های طبیعی چهار مد اول سیستم، نشان داده شده است. با افزایش ضخامت در طول ثابت تیر، سفتی و جرم کل تیر هر دو افزایش می‌یابند ولی اثر افزایش سفتی تیر خیلی بیشتر از افزایش جرم تیر است. بنابراین همانطور که نتایج هم نشان می‌دهند، با افزایش ضخامت تیر فرکانس‌های طبیعی سیستم افزایش می‌یابند.



شکل ۴: تاثیر نسبت ضخامت به طول سازه ساندویچی با هسته متخلخل بر فرکانس‌های طبیعی سیستم

اثر نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل تیر بر فرکانس‌های طبیعی چهار مد اول سازه در شکل ۵ بررسی شده است. با افزایش ضخامت هسته و ثابت در نظر گرفتن ضخامت کل، ضخامت رویه‌ها کم می‌شوند. هسته یک ماده متخلخل ضعیف است، ولی رویه‌ها پلیمر تقویت شده با نانولوله‌های کربنی هستند، بنابراین همانطور که نتایج هم نشان می‌دهند، با افزایش ضخامت هسته فرکانس‌های طبیعی سیستم کاهش می‌یابند.



شکل ۵. بررسی اثر نسبت ضخامت هسته‌ی متخلخل به ضخامت سازه‌ی ساندویچی بر فرکانس‌های طبیعی سیستم

در جدول ۸ اثر کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر فرکانس‌های طبیعی چهار مد اول سیستم نشان داده شده است. مدل الاستیسیته نانولوله‌های کربنی بسیار بیشتر از پلیمر است ولی چگالی هر دو نزدیک به هم هستند، بنابراین با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی، جرم تیر تغییر چندانی نمی‌کند ولی سفتی تیر به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد، بنابراین همانطور که نتایج هم نشان می‌دهند، فرکانس‌های طبیعی سازه ساندویچی افزایش می‌یابند.

جدول ۸: تاثیر کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر فرکانس‌های طبیعی سازه ساندویچی با هسته متخلخل

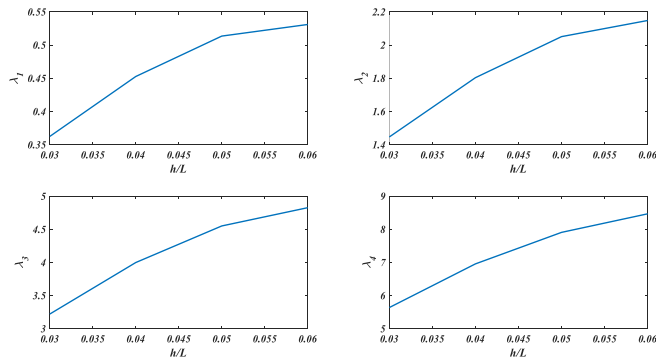
فرکانس‌های طبیعی	$V_{CNT} = 0.12$	$V_{CNT} = 0.17$
λ_1	۰/۴۵۰۰	۰/۵۰۹۱
λ_2	۱/۷۷۹۶	۲/۰۰۹۵
λ_3	۳/۹۳۱۴	۴/۴۲۶۳
λ_4	۶/۸۱۸۷	۷/۶۴۹۳

۴-۳- نتایج مربوط به هسته ویسکوالاستیک

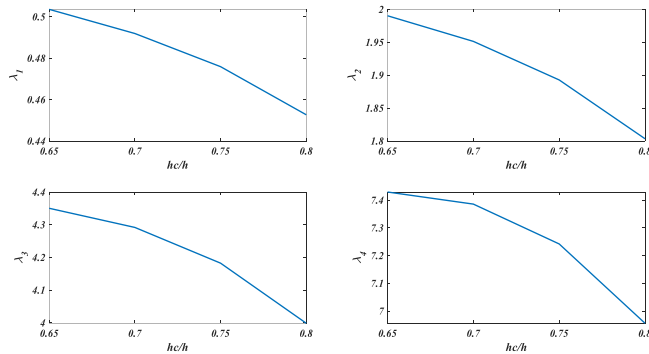
در جدول ۹، خواص مربوط به هسته ویسکوالاستیک ارائه شده است. در شکل‌های ۶ و ۷ به ترتیب اثر ضخامت بر طول سازه و اثر ضخامت هسته ویسکوالاستیک به ضخامت کل تیر، نشان داده شده است. همان‌طور که قبلاً نیز بیان شده، با افزایش ضخامت تیر و افزایش ضخامت هسته ویسکوالاستیک با ثابت در نظر گرفتن ضخامت کل سازه، فرکانس‌های طبیعی به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد.

جدول ۹: خواص مواد هسته ویسکوالاستیک [۲۷]

η	ν	$\rho \left(\frac{Kg}{m^3} \right)$	$G (Mpa)$	$E (Mpa)$
۰/۲۹۵۷	۰/۴	۹۹۹	۷۷/۸۰۵	۲۱۷/۸۵



شکل ۶: تاثیر نسبت ضخامت به طول سازه ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک بر فرکانس های طبیعی سیستم



شکل ۷: بررسی اثر نسبت ضخامت هسته ی ویسکوالاستیک به ضخامت سازه ساندویچی بر فرکانس های طبیعی سیستم

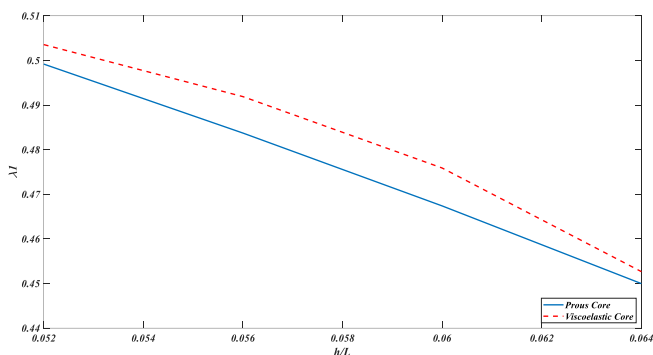
در جدول ۱۰ اثر کسر حجمی نانولوله های کربنی بر فرکانس های طبیعی چهار مد اول سازه ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک نشان داده شده است. با افزایش کسر حجمی نانولوله های کربنی، سفتی تیر به طور قابل توجهی افزایش می یابد، بنابراین همانطور که نتایج هم نشان می دهند، فرکانس های طبیعی سازه ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک افزایش پیدا می کند.

جدول ۱۰: تاثیر کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر فرکانس‌های طبیعی سازه ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک

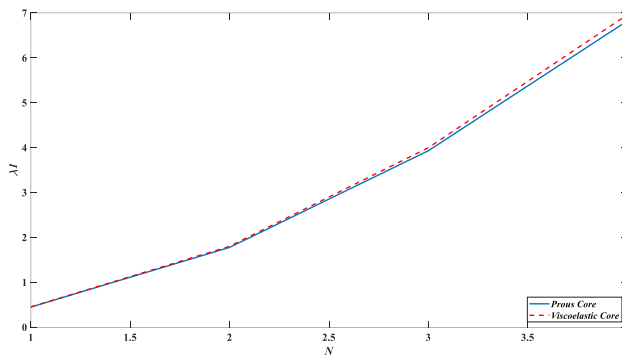
فرکانس‌های طبیعی	$V_{CNT} = 0.12$	$V_{CNT} = 0.17$
λ_1	۰/۴۵۲۷	۰/۵۰۵۲
λ_2	۱/۸۰۳۴	۲/۰۲۳
λ_3	۳/۹۹۸۵	۴/۵۱۵۶
λ_4	۶/۹۵۵۸	۷/۹۲۱۸

۴-۴- مقایسه مربوط به هسته متخلخل و هسته ویسکوالاستیک

در این قسمت به مقایسه دو هسته متخلخل و ویسکوالاستیک در فرکانس‌های طبیعی سازه ساندویچی با رویه‌های نانوکامپوزیتی پرداخته شده است. در شکل ۸ فرکانس طبیعی مد اول برحسب ضخامت هسته به ضخامت کل نشان داده شده است. طبق شکل مشاهده می‌شود که هسته ویسکوالاستیک دارای فرکانس طبیعی بیشتر نسبت به هسته متخلخل متقارن می‌باشد که این امر نشان‌دهنده سفتی بیشتر سازه ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک نسبت به هسته متخلخل است. در شکل ۹ نیز فرکانس‌های طبیعی سازه، برحسب چهار مد اول برای کسر حجمی ۰/۱۲ نشان داده شده است که طبق این شکل نیز می‌توان نتیجه گرفت که بیشترین فرکانس طبیعی مربوط به سازه ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک می‌باشد.



شکل ۸: مقایسه دو هسته متخلخل و ویسکوالاستیک در فرکانس طبیعی مد اول سازه ساندویچی برحسب ضخامت هسته به ضخامت کل



شکل ۹: مقایسه دو هسته متخلخل و ویسکوالاستیک در فرکانس‌های طبیعی سازه ساندویچی بر حسب مدهای ارتعاشی

۵- تشکر و قدردانی

به پاس الطاف بی‌دریغ و همت والایان، صمیمانه‌ترین سپاس‌ها را تقدیم می‌دارم و قدردان بزرگواری و فضل شما هستم.

۶- تعارض منافع

نویسنده(گان) اعلام می‌دارند که در مورد انتشار این مقاله تضاد منافع وجود ندارد. علاوه بر این، موضوعات اخلاقی شامل سرقت ادبی، رضایت آگاهانه، سوء رفتار، جعل داده‌ها، انتشار و ارسال مجدد و مکرر توسط نویسندگان رعایت شده است.

۷- دسترسی آزاد

این نشریه دارای دسترسی باز است و اجازه اشتراک (تکثیر و بازآرایی محتوا به هر شکل) و انطباق (بازترکیب، تغییر شکل و بازسازی بر اساس محتوا) را می‌دهد.

۸- نتیجه‌گیری کلی

پژوهش حاضر با تمرکز بر بررسی و مقایسه هسته‌های متخلخل و ویسکوالاستیک بر فرکانس‌های طبیعی سازه‌های ساندویچی نتایج ارزشمندی را در راستای بهینه‌سازی استحکام و ایمنی سازه‌های دفاعی ارائه می‌دهد. با بکارگیری تئوری سه لایه تیر ساندویچی که شامل تئوری تیموشنکو برای رویه‌ها و تئوری فراستیگ برای هسته سازه ساندویچی می‌باشد و همچنین به کمک اصل همپلتون، معادلات حاکم بر سازه ساندویچی با رویه‌های نانوکامپوزیتی هسته متخلخل و ویسکوالاستیک بدست آمدند. معادلات به‌دست آمده به صورت معادلات دیفرانسیل پیچیده با مشتقات جزئی می‌باشند که برای حل این معادلات تعادل، از روش نیمه‌تحلیلی ناویر استفاده شده است. پارامترهای بسیار مهم و مختلفی نظیر ضریب تخلخل هسته، پارامترهای بی‌بعد نسبت ابعاد به یکدیگر، درصد نانولوله‌های

کربنی و الگوی توزیع حفره‌های هسته، بر فرکانس‌های طبیعی سیستم مورد بررسی و تحلیل قرار گرفتند. با تحلیل نتایج بیان شده، نتیجه‌های مهمی استنباط شدند که عبارتند از:

- با افزایش ضریب تخلخل هسته، حفره‌ها بزرگتر می‌شوند، سختی تیر کاهش می‌یابد، از طرفی جرم تیر نیز کاهش می‌یابد و اثر این کاهش جرم تیر نسبت به کاهش سختی تیر بیشتر می‌باشد، بنابراین فرکانس سیستم افزایش می‌یابد.
- در تاثیر الگوی توزیع حفره‌های هسته بر فرکانس‌های طبیعی سیستم، بیشترین فرکانس مربوط به توزیع متقارن تخلخل است، چون در این توزیع حفره‌های نزدیک تار خنثی درشت‌تر هستند و هرچه از تار خنثی فاصله می‌گیرند، ریزتر می‌شوند.
- با افزایش ضخامت در طول ثابت تیر، سفتی و جرم کل تیر هر دو افزایش می‌یابند ولی اثر افزایش سفتی تیر خیلی بیشتر از افزایش جرم سازه است، بنابراین فرکانس‌های طبیعی سازه ساندویچی با هسته متخلخل و ویسکوالاستیک افزایش می‌یابد.
- با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی، جرم تیر تغییر چندانی نمی‌کند ولی سفتی سازه (تیر) به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد، بنابراین فرکانس‌های طبیعی سازه ساندویچی افزایش می‌یابد.
- با افزایش ضخامت هسته و با ثابت در نظر گرفتن ضخامت کل، فرکانس‌های طبیعی سیستم کاهش می‌یابد.
- استحکام و فرکانس طبیعی سازه ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک، بیشتر از هسته متخلخل می‌باشد.

۹-منابع

- [1]. Teymouri H, Biglari H. Elastodynamic Green's functions for sandwich panels with aluminum foam core and transversely isotropic face sheets using potential functions method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. **2024**, 160, 258-272.
- [2]. Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press. **2004**.
- [3]. Yang J, Chen Y, Xiang Y, Jia X. Free and forced vibration of cracked inhomogeneous beams under an axial force and a moving load. *Journal of Sound and Vibration*. **2008**, 312(1), 166-181.
- [4]. Rahnama M, Morad Sheikhi M, Hamzeloo SR. Free vibration behavior of three-skin conical shells with composite lattice core based on semi-analytical and finite element methods. *Aerospace Mechanics*. **2024**, 20(3), 75-86, (In Persian).
- [5]. Şimşek M, Kocatürk T. Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. *Composite Structures*. **2009**, 90(4), 465-473.
- [6]. Safaei B, Onyibo EC, Goren M, Kotrasova K, Yang Z, Arman S, Asmael M. Free vibration investigation on RVE of proposed honeycomb sandwich beam and material selection optimization. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*. **2023**, 21(1), 31-50.
- [7]. Belkhodja MEA, Chorfi SM, Belalia SA, Belkhodja Y. Bending and free vibrations analysis of sandwich beams with porous functionally graded face sheets and a graphene platelets-reinforced aluminum core using a new quasi-3D beam theory. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. **2025**, 13(1), 122.
- [8]. Dzenis Y. Structural nanocomposites. *Science*. **2008**, 319(5862), 419-420.
- [9]. Ke L-L, Yang J, Kitipornchai S. Nonlinear free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams. *Composite Structures*. **2010**, 92(3), 676-683.
- [10]. Ebrahimi F, Dabbagh A, Rastgoo A. Free vibration analysis of multi-scale hybrid nanocomposite plates with agglomerated nanoparticles. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. **2021**, 49(4), 487-510.
- [11]. Zandi-Baghche-Maryam A, Hosseini M. Analytical Analysis for Free Vibration of Different Arrangements of BNNTs under Initially Stress. *Aerospace Mechanics*. **2019**, 15(3), 33-46, (In Persian).
- [12]. Heshmati M, Yas MH. Dynamic analysis of functionally graded multi-walled carbon nanotube-polystyrene nanocomposite beams subjected to multi-moving loads. *Materials and Design*. **2013**, 49, 894-904.
- [13]. Tahami FV, Biglari H, Raminnea M. Optimum design of FGX-CNT-

reinforced red clay pipes conveying fluid subjected to moving load. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. **2016**, 2(4), 243–253.

[14]. Kitipornchai S, Chen D, Yang J. Free vibration and elastic buckling of functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets. *Materials and Design*. **2017**, 116, 656–665.

[15]. Mirjavadi SS, Afshari BM, Barati MR, Hamouda AMS. Transient response of porous inhomogeneous nanobeams due to various impulsive loads based on nonlocal strain gradient elasticity. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. **2020**, 16(1), 57–68.

[16]. Li Y, Yao W, Wang T. Free flexural vibration of thin-walled honeycomb sandwich cylindrical shells. *Thin-Walled Structures*. **2020**, 157, 107032.

[17]. Lakes R. *Viscoelastic materials*. Cambridge university press. **2009**.

[18]. Meunier M, Shenoi RA. Dynamic analysis of composite sandwich plates with damping modelled using high-order shear deformation theory. *Composite Structures*. **2001**, 54(2-3), 243-454.

[19]. Won SG, Bae SH, Cho JR, Bae SR, Jeong WB. Three-layered damped beam element for forced vibration analysis of symmetric sandwich structures with a viscoelastic core. *Finite Elements in Analysis and Design*. **2013**, 68, 39-51.

[20]. Teymouri H, Biglari H, Sadeghi MH. Effects of Frequency Dependency of Materials Behavior on the Dynamic Response of the Viscoelastic Beam Under the Moving Mass. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. **2025**, 2650266.

[21]. Ghorbanpour Arani A, Haghparast E, Ghorbanpour Arani AH. Size-dependent vibration of double-bonded carbon nanotube-reinforced composite microtubes conveying fluid under longitudinal magnetic field. *Polymer Composites*. **2016**, 37(5), 1375-1383.

[22]. Frostig Y, Baruch M, Vilnay O, Sheinman I. High-order theory for sandwich-beam behavior with transversely flexible core. *Journal of Engineering Mechanics*. **1992**, 118(5), 1026-1043.

[23]. Ke LL, Yang J, Kitipornchai S. Nonlinear free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams. *Composite Structures*. **2010**, 92(3), 676-683.

[24]. Mohammadimehr M, Okhravi SV, Akhavan Alavi SM. Free vibration analysis of magneto-electro-elastic cylindrical composite panel reinforced by various distributions of CNTs with considering open and closed circuits boundary conditions based on FSDT. *Journal of Vibration and Control*. **2018**, 24(8), 1551-1569.

[25]. Biglari H, Teymouri H, Shokouhi A. Dynamic Response of Sandwich Beam with Flexible Porous Core Under Moving Mass. *Mechanics of Composite Materials*. **2024**, 60(1), 163-182.

- [26]. Yang M, Qiao P. Higher-order impact modeling of sandwich structures with flexible core. *International Journal of Solids and Structures*. **2005**, 42, 5460-5490.
- [27]. Bilasse M, Daya EM, Azrar L. Linear and nonlinear vibrations analysis of viscoelastic sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*. **2010**, 329(23), 4950-4969.
- [28]. Amirzdeh, M., Hosseini Moradi, S. A., ghobadi, N. Real Time Detection of Multi-Rotor Unmanned Aerial Vehicle Using YOLOv5 Optimized Algorithm. *Journal of Advanced Defense Science & Technology*, 2023; 14(1): 11-22
- [29]. Sepehri, M., abbasi, M. Reinforcement of structures against explosion by providing suitable structural shape and determining the type of the optimal fibers in concrete mix. *Aerospace Defense*, 2025; 4(1): 1-21.