

ISSN: 2821-157X		https://www.jasd.khadu.ir	
	Journal of Aerospace Defense Volume 4 Issue 1 Spring 2025 Pages 82 – 101		
Research Paper; 			
Model predictive guidance for the mid-phase of a ballistic missile using discrete laguerre functions Mehran Mehdiabadi¹, Nematollah Ghahremani² 1. Director of the research group 2. Associate Professor at the MUT University			
Article Information		Abstract	
Accepted: 2025/04/20 Received: 2025/01/07 Keywords: Model Predictive Guidance, Real Time, Solid Propellant Missile, laguerre Functions, Impact Accuracy Corresponding Author: Mehran Mehdi Abadi Email: mahdiabadi717@gmail.com		In this paper, a predictive guidance algorithm for the mid-course phase of a solid-propellant ballistic missile is presented using discrete laguerre functions. Utilizing predictive guidance significantly reduces the missile impact error compared to conventional methods. However, the computational load for implementation on a flight computer could be a fundamental challenge. For this reason, this research has established and developed a new predictive guidance algorithm based on orthogonal discrete laguerre functions to reduce the computational load while maintaining high accuracy in impact. This approach reduces the parameters describing the predictive guidance law, and the execution time of the algorithm's computations decreases significantly. Through 3D simulation, the impact of using this method for mid-course guidance of a ballistic missile is shown compared to predictive guidance. Additionally, comparing the computational loads of different predictive guidance algorithms demonstrates the advantage of this method in reducing the computational demands.	
HOW TO CITE Mehran Mehdiabadi, Nematollah Ghahremani. (2025). Model predictive guidance for the mid-phase of a ballistic missile using discrete laguerre functions. Aerospace Defense, Vol 4(Issue1), Page 82–101.			



فصلنامه علمی دفاع هوافضایی

شماره ۱ دوره ۴
بهار ۱۴۰۴
صفحات ۱۰۱-۸۲



مقاله پژوهشی؛ 

هدایت پیش‌بین فاز میانی یک موشک بالستیک با استفاده از توابع لاگر

گسسته

مهران مهدی آبادی^۱، نعمت الله قهرمانی^۲

۱. مدیر گروه پژوهشی دانشگاه مالک اشتر

۲. مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر دانشگاه صنعتی مالک اشتر

اطلاعات مقاله	چکیده
تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۰/۱۸	در این مقاله، الگوریتم هدایت پیش‌بین فاز میانی یک موشک بالستیک سوخت جامد با استفاده از توابع لاگر گسسته ارایه شده است. بهره‌گیری از هدایت پیش‌بین سبب کاهش قابل توجه خطای اصابت موشک نسبت به روش‌های مرسوم می‌شود. اما ممکن است حجم محاسبات آن جهت پیاده‌سازی در کامپیوتر پرواز، چالشی اساسی به شمار آید. به همین منظور در این تحقیق، برای کاهش حجم محاسبات الگوریتم هدایت پیش‌بین و بهره‌گیری از دقت بالای اصابت، الگوریتم هدایت پیش‌بین جدیدی مبتنی بر توابع متعامد لاگر گسسته پایه‌گذاری و توسعه داده شده است. استفاده از این روش، سبب کاهش پارامترهای توصیف‌کننده قانون هدایت پیش‌بین شده و زمان اجرای محاسبات الگوریتم هدایت کاهش چشمگیری پیدا می‌کند. با انجام شبیه‌سازی سه درجه آزادی، تاثیر بهره‌گیری از این روش در هدایت فاز میانی یک موشک بالستیک در مقایسه با هدایت پیش‌بین نشان داده شده است. علاوه بر این، مقایسه حجم محاسبات الگوریتم‌های هدایت پیش‌بین مختلف، مزیت استفاده از این روش در کاهش حجم محاسبات را نشان می‌دهد.
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱/۳۱	
کلیدواژه‌ها:	
هدایت پیش‌بین، زمان واقعی، موشک بالستیک سوخت جامد، توابع متعامد لاگر، دقت اصابت	
نویسنده مسئول: مهران مهدی آبادی ایمیل: mahdiabadi717@gmail.com	

استناد: مهران مهدی آبادی، نعمت الله قهرمانی. (۱۴۰۴). هدایت پیش‌بین فاز میانی یک موشک بالستیک با استفاده از توابع لاگر گسسته. دفاع هوافضایی، دوره ۴ (شماره ۱)، صفحات ۱۰۱-۸۲.

۱- مقدمه

هدایت موشک‌های سوخت جامد علیرغم پیشرفت‌های بسیار زیاد، هنوز زمینه بازی برای تحقیقات می‌باشد. علت اساسی آن عدم قطع نیروی رانش و تغییرات زیاد آن است [۱]. اغتشاشاتی مانند اثر باد یا منابع خطای دیگر در مراتب بعدی قرار دارند. این مسایل و عدم قطعیت‌ها، سبب پراکندگی خطای برخورد موشک به هدف می‌شود. اساساً روش‌های استاندارد و مرسوم و مبتنی بر سرعت لازمه مانند Q و Q^* بر اساس فرض قطع رانش طراحی شده‌اند. بنابراین این روش‌ها به طور مستقیم در موشک‌های سوخت جامد قابل استفاده نبوده و بایستی اصلاحاتی روی آنها صورت پذیرد. یا روش‌های جدید دیگری برای حل مساله طراحی شود. دو رویکرد در حل این مساله می‌توان در نظر گرفت. یکی آنکه برای قبل از خاموشی موتور، سیستم هدایت طراحی شود. دیگر آنکه در صورت وجود نیروی کنترل، پس از خاموشی موتور، هدایت صورت گیرد. در هر یک از زمینه‌های فوق، تحقیقاتی صورت گرفته است. برای این منظور، مندیگ با استفاده از هدایت اصلاح زاویه مسیر، الگوریتم هدایتی برای یک موشک زمین به زمین توسعه داده و شبیه‌سازی کرده است [۲، ۳]. اساس کار این الگوریتم هدایت، مبتنی بر اختلاف متغیرهای حالت جاری موشک نسبت به متغیرهای حالت مسیر نامی بوده و اصلاح زاویه مسیر با توجه به این اختلاف صورت می‌گیرد. با توجه به اینکه در عمل، حساسیت اتوپایلویت زاویه مسیر نسبت به اغتشاشات زیاد است، بنابراین بهره‌گیری از هدایت اصلاح زاویه مسیر مناسب نبوده و بهتر است از هدایت اصلاح زاویه فراز استفاده شود.

اسماعیل‌زاده در روش هدایت جدیدی را بر اساس هدایت لامبرت برای یک موشک سوخت جامد ارائه داده‌اند. این روش پیشنهادی، بلافاصله پس از صفر شدن سرعت مانده موشک V_g ، بکار گرفته می‌شود. روش پیشنهادی، به خاموشی بوستر موشک حساس نبوده و خطاهای ناشی از تخمین سرعت V_{Cap} را ندارد. حداکثر سرعت قابل دستیابی در ازای مصرف کل سوخت موشک V_{Cap} ، پارامتری است که با تخمین آن، روش‌های هدایت مختلفی ارائه شده است [۴]. چون تخمین این پارامتر بواسطه وجود اغتشاشات مختلف، تخمین دقیقی نیست، بنابراین روش‌های هدایت مبتنی بر این پارامتر نیز از دقت مناسبی برخوردار نیستند. روش‌های هدایت مبتنی بر V_{Cap} بر اساس اختلاف زاویه بین بردار تراس و بردار سرعت مانده (θ) پایه‌گذاری شده‌اند. بنابراین در این روش‌ها، با نزدیک شدن به نقطه خاموشی موتور، بایستی سرعت مانده V_g و اختلاف زاویه موجود بین بردار تراس و بردار سرعت مانده به سمت صفر میل کند. هدف اصلی در این روش‌ها، استخراج تابعی برای زاویه (θ) بر اساس سایر پارامترهای پروازی است. معمولاً زاویه (θ) تابعی از سرعت مانده V_g و V_{Cap} است. در [۵]، معصوم‌نیا دو روش تحلیلی برای تعیین تابع زمانی (θ) ارائه کرده‌اند. در روش اول، با استفاده از تخمین زمان باقیمانده تا خاموشی موتور، تابعی برای زاویه (θ) استخراج شده تا سرعت موشک در انتهای مصرف سوخت، برابر سرعت لازمه شود. در روش دوم با استفاده از استراتژی هدایت بهینه و در نظر گرفتن قیود حاکم بر مساله، تابعی برای زاویه (θ) استخراج شده است. در [۶] زردشتی، هدایت اصلاح زاویه مسیر مبتنی بر هدایت

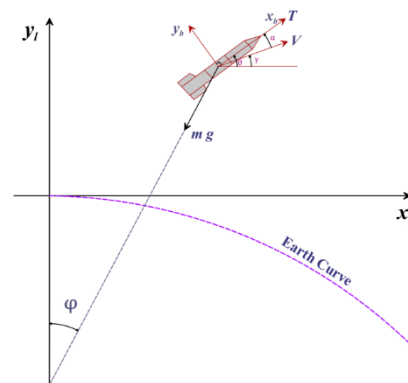
لامبرت را توسعه داده و شبیه‌سازی کرده است. این روش هدایتی برای موشک‌های بالستیک و ماهواره‌برهای سوخت مایع قابل استفاده بوده و در موشک‌های سوخت جامد، امکان بکارگیری این روش وجود ندارد. کوک و همکاران در [۷] با استفاده از مفهوم سرعت لازمه، هدایت تناسبی اصلاح شده‌ای برای موشک‌های زمین به زمین تاکتیکی توسعه داده‌اند. در این روش، اصلاح سرعت لازمه بر اساس تغییرات بردار موقعیت موشک نسبت به موقعیت نامی آن، محاسبه شده و اعمال می‌شود. در [۸] گریگوری به بررسی پراکندگی خطای اصابت موشک زمین به زمین بر اساس هدایت زاویه مسیر موشک پرداخته است. نتایج این بررسی، مشابه سایر کارهای ذکر شده در [۲، ۷] می‌باشد. کومار در [۹] به ارایه الگوریتم هدایتی مبتنی بر برنامه‌ریزی استاتیک پیش‌بین برای موشک تاکتیکی پرداخته است که حجم محاسبات مورد نیاز آن به مراتب نسبت به روش ارایه شده در این مقاله بیشتر است. در مرجع [۱۰] یک کنترل‌کننده پیش‌بین مدل صریح را برای هدایت و کنترل یکپارچه موشک در فضای سه‌بعدی معرفی می‌کند که با حذف بهینه‌سازی آنالین، دقت برخورد را افزایش و زمان واکنش را کاهش می‌دهد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که این روش نسبت به کنترل‌کننده‌های سنتی مانند PID و LQR عملکرد بسیار بهتری در کاهش فاصله خطا و زمان برخورد دارد. در [۱۱] یک الگوریتم هدایت پیش‌بینی-تصحیح محاسباتی برای موشک‌ها ارائه می‌دهد که با در نظر گرفتن محدودیت‌های زمان و زاویه برخورد، دقت اصابت به هدف را افزایش می‌دهد. روش پیشنهادی با ترکیب مدل‌سازی پیش‌بین و اصلاح مسیر در زمان واقعی، عملکرد بهتری نسبت به روش‌های سنتی مانند هدایت تناسبی نشان می‌دهد.

در مقاله [۱۲] یک روش کنترل مقاوم چندبعدی برای ردیابی دقیق مسیر در سامانه‌های دارای عدم قطعیت و محدودیت ورودی ارائه می‌دهد که ترکیبی از برنامه‌ریزی ایستا پیش‌بین مدل توسعه‌یافته و استراتژی افق متحرک (RHC) است. الگوریتم پیشنهادی ضمن حفظ پایداری و دقت، می‌تواند محدودیت‌های فیزیکی را رعایت کرده و در مسیرهای پیچیده و متغیر عملکرد مؤثری ارائه دهد. در مرجع [۱۳] به بررسی استفاده از یادگیری عمیق تقویتی (DRL) برای طراحی قوانین راهنمایی موشک در برابر اهداف متحرک می‌پردازد. در این تحقیق، با استفاده از الگوریتم Proximal Policy Optimization (PPO) و قانون Zero-Effort Miss (ZEM)، سیاست‌های راهنمایی موشک آموزش داده می‌شوند تا با پیش‌بینی الگوهای فرار هدف، دقت برخورد را افزایش دهند. در مقاله [۱۴] یک قانون هدایت پیش‌بینی بهینه برای موشک‌ها را معرفی می‌کند. این قانون از تکنیک‌های ادغام اطلاعات برای بهبود دقت هدایت استفاده می‌کند و شرایط اولیه موشک و هدف را در نظر می‌گیرد. هدف این است که با تخصیص هدفمند منابع سوخت و محاسباتی، عملکرد موشک بهینه شود. رویکرد پیشنهادی باعث می‌شود تا موشک بتواند به‌طور مؤثرتری هدف را رهگیری کرده و در عین حال مصرف سوخت و منابع محاسباتی را بهینه کند. این روش می‌تواند دقت و کارایی سیستم‌های هدایت موشک را به‌طور چشمگیری افزایش دهد.

در این مقاله، الگوریتم هدایت پیش‌بین فاز میانی یک موشک بالستیکی سوخت جامد مبتنی بر توابع لاگر گسسته ارایه شده است. مزیت این روش، کاهش قابل توجه حجم محاسبات و افزایش سرعت اجرای الگوریتم هدایت خواهد بود. این مزیت، به عملیاتی شدن پیاده‌سازی الگوریتم در کامپیوتر پرواز موشک کمک شایانی می‌کند. تابع هزینه الگوریتم هدایت پیش‌بین، تابعی مربعی از خطای هدایت می‌باشد. فرمان بهینه هدایت بر اساس بهینه‌سازی تابع هزینه یاد شده بدست می‌آید. این بهینه‌سازی در پنجره‌های زمانی معینی با گذشت زمان تکرار شده و فرایند بهینه‌سازی فرامین هدایت به صورت حلقه بسته اجرا می‌شود. در این روش، با بهره‌گیری از اطلاعات افق آینده، هدایت مبتنی بر کنترل پیش‌بین توسعه داده شده است. بهره‌گیری از کنترل پیش‌بین در استخراج قانون هدایت، سبب بهینگی آن در هر افق محدود پیش‌بینی شده است. با استفاده از شبیه‌سازی سه درجه آزادی، مقایسه روش پیشنهادی نسبت به روش مرسوم هدایت دلتا مورد بررسی قرار گرفته است.

۲-مدل سازی دینامیک حرکت موشک

معادلات حرکت سه درجه آزادی موشک در دستگاه مختصات کروی به صورت زیر قابل بیان است [۱۷-۱۵]. این معادلات، با فرض عدم چرخش حاصل شده و توصیف کننده حرکت انتقالی موشک در صفحه فراز می‌باشند. این معادلات برای استخراج قانون هدایت کانال فراز موشک مناسب هستند. دستگاه مختصات $Ox_b Y_b Z_b$ دستگاه مختصات بدنی موشک و دستگاه $Ox_l Y_l Z_l$ دستگاه مختصات محلی کروی است.



شکل ۱- شمایی از موشک در دستگاه مختصات محلی

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= V \cos \gamma \\
 \dot{y} &= V \sin \gamma \\
 \dot{V} &= a_V \\
 \dot{\gamma} &= \frac{a}{V} = q - \dot{\alpha}, \quad \dot{q} = \frac{M}{I_{yy}}, \quad \dot{\theta} = q, \quad \dot{m} = -\frac{T}{I_{sp} g_0}, \quad \theta = \gamma + \alpha
 \end{aligned} \quad (1)$$

که a_V, a_γ شتاب‌های دورانی و مماسی در راستای V, γ بوده و به صورت زیر قابل محاسبه هستند:

$$\begin{aligned} a_V &= \frac{T \cos \alpha - D}{m} - g \sin \gamma \\ a_\gamma &= \frac{T \sin \alpha + L}{m} - g \cos \gamma + \frac{V^2}{r} \cos \gamma \end{aligned} \quad (2)$$

در معادلات دینامیک پرواز فوق، $\vec{r} = [x \ y]^T$ و $\vec{V}$ به ترتیب بردار موقعیت و سرعت موشک در دستگاه مختصات کروی است. متغیرهای θ, q نرخ زاویه فراز، زاویه فراز موشک بوده و T نیروی تراست آن است. زوایای α, γ نیز به ترتیب زاویه مسیر و زاویه حمله موشک هستند. پارامترهای D و L نیز نیروهای آیرودینامیکی پسا و برآ بوده و برحسب ضرایب آیرودینامیکی و فشار دینامیکی موشک قابل محاسبه هستند. گشتاور ممان حول محور Y به صورت زیر بیان می‌شود:

$$M_y = M_{y,A} + M_{y,P} \quad (3)$$

که $M_{y,A}, M_{y,P}$ به ترتیب گشتاور ممان ناشی از پیشرانش و نیروی آیرودینامیک می‌باشد. محاسبه نیروهای آیرودینامیک استفاده شده در شبیه‌سازی بر اساس روابط متداول حاکم بر آنها صورت گرفته و به قرار زیر است [۱۸]:

$$\begin{aligned} D &= 0.5 \rho \|V\|^2 S_{ref} (-C_A) \\ L &= 0.5 \rho \|V\|^2 S_{ref} (-C_{y\beta} \beta) \\ M_{y,A} &= 0.5 \rho \|V\|^2 L_{ref} \times \\ &\quad \left[C_{m\alpha} \alpha + (C_{m\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + C_{mq} q) \frac{L}{2 \|V\|} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

که S_{ref} و L_{ref} به ترتیب، طول و سطح مرجع موشک هستند. نیروها و ممان آیرودینامیکی بر اساس ضرایب آیرودینامیکی حاصله از نرم‌افزار مناسب مورد استفاده قرار گرفته‌اند. معادلات فوق، معادلات غیرخطی حرکت موشک بوده و به صورت زیر قابل توصیف است:

$$\dot{x}_s = f(x_s, u_s, t) \quad (5)$$

که x_s, u_s به ترتیب، ورودی کنترلی و بردار متغیرهای حالت سیستم غیرخطی فوق بوده و به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} x_s &= [x \ y \ V \ \gamma \ q]^T \\ u_s &= \theta \end{aligned} \quad (6)$$

۳- خطی‌سازی معادلات حرکت

قانون هدایت جدید ارایه شده در این مقاله بر اساس کنترل پیش‌بین خطی توسعه یافته است. برای استخراج قانون هدایت، خطی‌سازی معادلات غیرخطی حرکت حول مسیر نامی انجام شده است.

خطی سازی معادلات بر اساس بسط تیلور حول مسیر نامی و با صرف نظر کردن از عبارات مرتبه بالای آن حاصل شده است:

$$\Delta \dot{x}_s = M(t) \Delta x_s + N(t) \Delta u_s \quad (7)$$

که بردارهای Δx_s , Δu_s به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \Delta x_s &= x_s - x_s^* \\ \Delta u_s &= u_s - u_s^* \end{aligned} \quad (8)$$

متغیرهای x_s^* , u_s^* به ترتیب مقادیر مسیر نامی بردارهای کنترل و حالت در هر لحظه از زمان می‌باشند. این مقادیر با اعمال قانون هدایت پیش تنظیم در فاز اولیه پرتاب موشک و در یک بازه زمانی معین، با هدف دستیابی به یک برد از پیش تعیین شده حاصل شده‌اند. ماتریس‌های $M(t)$, $N(t)$ ماتریس‌های ژاکوبین سیستم بوده و از رابطه زیر حاصل شده است:

$$\begin{aligned} M(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \gamma & -V \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \sin \gamma & V \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial a_V}{\partial V} & \frac{\partial a_V}{\partial \gamma} & 0 \\ \frac{\partial a_\gamma}{V \partial x} & \frac{\partial a_\gamma}{V \partial y} & \frac{\partial a_\gamma}{V \partial V} & \frac{\partial a_\gamma}{V \partial \gamma} & \frac{\partial a_\gamma}{V \partial q} \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} \left(\frac{\partial M_{y,A}}{\partial V} \right) & \frac{1}{I_{yy}} \left(\frac{\partial M_{y,A}}{\partial \gamma} \right) & \frac{1}{I_{yy}} \left(\frac{\partial M_{y,A}}{\partial q} \right) \end{pmatrix} \\ N(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial a_V}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{a_\gamma}{V} \right) & \frac{1}{I_{yy}} \left(\frac{\partial M_{y,A}}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}^T \end{aligned} \quad (9)$$

در این مقاله، توسعه قانون هدایت با استفاده از چهار متغیر اول x_s صورت گرفته و سایر پارامترها نظیر q تاثیر ناچیزی در قانون هدایت پیش بین داشته و قابل صرف نظر کردن هستند [۱۷]. بنابراین بردار خروجی به صورت در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} y(t) &= \Sigma(t) \Delta x_s + \Xi(t) \Delta u_s \\ \Sigma(t) &= I_{4 \times 4} \\ \Xi(t) &= \underline{0} \end{aligned} \quad (10)$$

ماتریس‌های فوق به صورت ضمنی، توابی از زمان هستند. بنابراین در هر لحظه از زمان و با تغییر پارامترهای حرکتی موشک، درایه ماتریس‌ها تغییر می‌کنند. با بدست آوردن مدل خطی پیوسته حرکت

موشک حول مسیر نامی، مدل خطی گسسته آن با توجه به زمان نمونه برداری T_s به صورت رابطه (۱۱) حاصل شده است. در این مقاله، از این مدل برای توسعه فرمان هدایت مبتنی بر کنترل پیش بین استفاده شده است.

$$\begin{cases} \Delta x_{k+1} = A_k \Delta x_k + B_k \Delta u_k \\ \Delta y_k = C_k \Delta x_k \end{cases} \quad (11)$$

۴- قانون هدایت دلتا برای اصلاح زاویه فراز موشک سوخت جامد

پایه و اساس هدایت دلتا برای اصلاح زاویه فراز، تعیین فرمان تغییر زاویه فراز جهت کاهش تغییرات جزئی پارامترهای مسیر واقعی نسبت به پارامترهای مسیر نامی است. زاویه فراز مطلوب، یک تابع خطی از این تغییرات جزئی و ضرایب حساسیت آن است. ضرایب حساسیت، قبل از پرتاب موشک و بر اساس محاسبه خطای فاصله برخورد به هدف در نقاط اصابت ناشی از تغییرات جزئی پارامترهای پروازی بدست می آید. به بیان ساده، هدایت دلتا برای موشک های سوخت جامد، در هر لحظه از زمان اعمال هدایت، با اصلاح زاویه فراز نسبت به مسیر نامی، سعی در حداقل کردن خطای برد را دارد. بنابراین هدایت دلتا، سعی در حداقل کردن مسیر موشک نسبت به مسیر نامی آن جهت دستیابی به حداقل خطای برد را دارد. در صورتی $\bar{r}_n$ بردار مسیر نامی موشک برای یک برد مشخص باشد، در این صورت، بایستی اختلاف مسیر واقعی موشک نسبت به مسیر نامی معادل صفر شود.

$$\bar{r}_n - \bar{r}_m(\bar{r}, \bar{V}, \theta) = \bar{r}_n - \bar{r}_m(x, y, u_e, v_e, \theta) = 0 \quad (12)$$

اما در عمل به علت وجود اغتشاشات مختلف، عبارت تساوی فوق برقرار نمی شود و هدایت اصلاح زاویه فراز، سعی در کاستن این اختلاف را دارد. با بسط مرتبه اول سری تیلور مسیر واقعی موشک حول مسیر نامی، قانون هدایت اصلاح زاویه فراز دلتا حاصل می شود [۲، ۳، ۷]:

$$\bar{r}_n - \bar{r}_m(x^*, y^*, u_e^*, v_e^*, \theta^*) - \quad (13)$$

$$\left[\frac{\partial \bar{r}_m}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial y_i} \Delta y_i + \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial u_{e,i}} \Delta u_{e,i} + \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial v_{e,i}} \Delta v_{e,i} + \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial \theta_i} \Delta \theta_i \right] = 0$$

دو عبارت اول رابطه (۱۳) معادل یکدیگر بوده و برای برقراری تساوی فوق، بایستی عبارت سوم آن نیز معادل صفر شود. در این صورت قانون هدایت اصلاح زاویه فراز به صورت زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial \bar{r}_m}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial y_i} \Delta y_i + \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial u_{e,i}} \Delta u_{e,i} + \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial v_{e,i}} \Delta v_{e,i} + \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial \theta_i} \Delta \theta_i = 0 \quad (14)$$

$$\Delta \theta_i = - \frac{\left[\frac{\partial \bar{r}_m}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial y_i} \Delta y_i + \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial u_{e,i}} \Delta u_{e,i} + \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial v_{e,i}} \Delta v_{e,i} \right]}{\frac{\partial \bar{r}_m}{\partial \theta_i}}$$

که مشتقات جزئی رابطه (۱۴)، ضرایب حساسیت تابع برد موشک نسبت به پارامترهای حرکت موشک می‌باشد. بر این اساس، قانون هدایت اصلاح زاویه فراز بر اساس تغییرات مورد نیاز زاویه فراز به صورت زیر به سیستم اعمال می‌شود:

$$\theta_{C,i} = \theta_i^* + \Delta\theta_i \quad (۱۵)$$

که θ_i^* مقدار زاویه فراز نامی در لحظه i و $\theta_{C,i}$ قانون هدایت دلتا زاویه فراز در آن لحظه است. در هدایت اصلاح زاویه فراز فوق، تغییرات مورد نیاز زاویه فراز $\Delta\theta_i$ تنها به متغیرهای حالت پرواز و ضرایب حساسیت آنها در همان لحظه وابسته است. در این مقاله با ارایه یک رویکرد جدید و با استفاده از کنترل پیش‌بین، قانون هدایت اصلاح زاویه فراز نه تنها به متغیرهای حالت همان لحظه، بلکه به متغیرهای موجود در افق آینده آن وابسته شده است. این کار سبب بهبود قابل ملاحظه در نتایج حاصله شده است.

۵- توسعه قانون هدایت پیش‌بین با استفاده از توابع لاگر گسسته

قانون جدید هدایت پیش‌بین توسعه یافته در این مقاله بر اساس توابع لاگر گسسته پایه گذاری شده است. این توابع، توابع گسسته متعامدی هستند که در توصیف سیگنال کنترل هدایت پیش‌بین مورد استفاده قرار گرفته‌اند. متعامد بودن این توابع، ویژگی مهمی است که سبب کاهش حجم اطلاعات در توصیف سیگنال کنترل می‌شود. با توجه به اینکه مجموعه توابع لاگر یک دستگاه پایه‌ی کامل است، بنابراین هر تابع با شرایط خاص مثلاً با رشد محدود را می‌توان به صورت ترکیب خطی از توابع لاگر تقریب زد. کاهش حجم اطلاعات به کاهش چشمگیر حجم محاسبات هدایت پیش‌بین منجر می‌شود. تطبیق ضرایب پایه‌های لاگر به راحتی قابل انجام و دارای همگرایی عالی است. این مزایا سبب جذابیت بکارگیری توابع متعامد لاگر در سیستم‌های عملیاتی و زمان واقعی به شمار می‌رود. در هر لحظه نمونه برداری k_i ، بردار کنترل هدایت پیش‌بین به صورت زیر توصیف می‌شود.

$$\underline{\Delta U}_k = [\Delta u(k_i), \Delta u(k_i + 1), \dots, \Delta u(k_i + N_c - 1)]^T \quad (۱۶)$$

که N_c افق کنترل هدایت پیش‌بین است. با ترکیب خطی توابع لاگر، می‌توان تقریب مناسبی برای هر یک از درلیه‌های بردار کنترل $\underline{\Delta U}_k$ بیان کرد. به بیان دیگر، هر یک از درلیه‌های بردار کنترل $\underline{\Delta U}_k$ به صورت زیر قابل توصیف است:

$$\Delta u(k_i + k) = \sum_{j=1}^N C_j(k_i) l_j(k) = L(k)^T \eta_{k_i} \quad (۱۷)$$

که C_j ها ضرایب ثابت و $l_j(k)$ توابع لاگر گسسته هستند. پارامتر N بیانگر تعداد توابع لاگر می‌باشد. پارامتر a قطب شبکه بوده و تعیین کننده سرعت افت تابع لاگر است. تابع n ام لاگر از رابطه بازگشتی زیر بدست می‌آید:

$$l_n(k) = \sqrt{1-a^2} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \binom{k+j}{n} a^{k-n+2j} \quad (18)$$

در فضای زمان گسسته، توابع لاگر به صورت دنباله‌ای تعریف می‌شوند که شکل بسته آن‌ها در حوزه Z نیز قابل ارایه است. توصیف توابع لاگر در حوزه Z بر اساس رابطه بازگشتی زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \Gamma_1(z) &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-az^{-1}} \\ \Gamma_2(z) &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-az^{-1}} \left(\frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}} \right) \\ \Gamma_3(z) &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-az^{-1}} \left(\frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}} \right)^2 \\ &\vdots \\ \Gamma_N(z) &= \Gamma_{N-1}(z) \frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}} \end{aligned} \quad (19)$$

هر تابع لاگر به قطب a وابسته است و انتخاب مناسب a کلید موفقیت در مدل‌سازی است. شرط پایداری شبکه توابع لاگر به قرار زیر است:

$$0 \leq a < 1 \quad (20)$$

توصیف توابع لاگر در حوزه زمان گسسته را می‌توان بر اساس رابطه تفاضلی زیر قابل بیان کرد:

$$L(k+1) = A_l L(k) \quad (21)$$

که $L(k)$ بردار توابع لاگر در حوزه زمان گسسته است:

$$L(k) = [l_1(k), l_2(k), \dots, l_N(k)]^T \quad (22)$$

ماتریس A_l یک ماتریس $N \times N$ بوده و تابعی از پارامترهای a و $\beta = 1 - a^2$ است. شرط اولیه رابطه تفاضلی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$L(0) = \sqrt{\beta} [1, -a, a^2, \dots, (-1)^{N-1} a^{N-1}]^T \quad (23)$$

به ازای $N=5$ ، ماتریس A_l و شرایط اولیه $L(0)$ به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$A_l = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & a & 0 & 0 & 0 \\ -a\beta & \beta & a & 0 & 0 \\ a^2\beta & -a\beta & \beta & a & 0 \\ -a^3\beta & a^2\beta & -a\beta & \beta & a \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$L(0) = \sqrt{\beta} [1, -a, a^2, -a^3, a^4]^T$$

کنترل پیش‌بین، استفاده از یک مدل دینامیکی از فرایند برای پیش‌بینی رفتار آتی سیستم و بدست آوردن بهترین ورودی کنترلی برای آن است [۱۹]. به بیان دیگر، این روش، کنترل بهینه حلقه‌بسته‌ای است که در هر لحظه از زمان، قانون کنترل بهینه محاسبه شده و به سیستم اعمال می‌شود [۲۰]. در این مقاله، برای توسعه قانون هدایت جدید مبتنی بر کنترل پیش‌بین از مدل خطی شده بهره گرفته شده است. بر این اساس، مدل خطی گسسته سیستم تا افق پیش‌بینی N_p به صورت توصیف شده است:

$$\underline{\Delta U}_k = \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \Delta u_{k+1} \\ \Delta u_{k+2} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+N_p-1} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} I \\ A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{N_p-1} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\underline{\Delta X}_k = \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta x_{k+1} \\ \Delta x_{k+2} \\ \vdots \\ \Delta x_{k+N_P-1} \end{bmatrix} \quad \underline{\Delta Y}_k = \begin{bmatrix} \Delta y_k \\ \Delta y_{k+1} \\ \Delta y_{k+2} \\ \vdots \\ \Delta y_{k+N_P-1} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ AB & B & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ A^{N_P-2}B & A^{N_P-3}B & \dots & B & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{cases} \underline{\Delta X}_k = F \Delta x_k + H \underline{\Delta U}_k \\ \underline{\Delta Y}_k = C \underline{\Delta X}_k \\ \underline{\Delta U}_k = \left[L(0)^T \eta_{k_i}, L(1)^T \eta_{k_i}, \dots, L(N-1)^T \eta_{k_i} \right]^T \end{cases} \quad (27)$$

با ترکیب دو روابط (۲۶) و (۲۷)، رابطه (۲۸) بر حسب بردار متغیرهای حالت و بردار ورودی‌ها به صورت زیر قابل حاصل می‌شود:

$$\underline{\Delta Y}_k = C F \Delta x_k + C H \underline{\Delta U}_k \quad (28)$$

رابطه (۲۸) را می‌توان به صورت زیر ساده بیان کرد:

$$\underline{\Delta Y}_k = G \Delta x_k + \Phi \underline{\Delta U}_k \quad (29)$$

که ماتریس‌های جدید G, Φ به صورت زیر هستند:

$$G = C F, \quad \Phi = C H \quad (30)$$

تابع معیار بهینه‌سازی، به صورت نرم خطاهای حالت و ورودی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\min J = \| W - \underline{\Delta Y}_k \|_Q^2 + \| \underline{\Delta U}_k \|_R^2 \quad (31)$$

که N_p و N_c به ترتیب افق پیش‌بینی و افق کنترل بوده و Q, R ماتریس‌های بهره برای تنظیم سرعت همگرایی و تسریع در بهینه‌سازی استفاده می‌شوند. بردار W نیز، بردار سیگنال مرجع در زمان‌های آتی است. تابع فوق بر حسب بردارهای $\underline{\Delta Y}_k, \underline{\Delta U}_k$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\min J = W - \underline{\Delta Y}_k^T Q W - \underline{\Delta Y}_k + \underline{\Delta U}_k^T R \underline{\Delta U}_k \quad (32)$$

با بهره‌گیری از توابع لاگر گسسته، تابع هزینه فوق به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\min J = W - \underline{\Delta Y}_k^T Q W - \underline{\Delta Y}_k + \eta^T R \eta \quad (33)$$

بهینه‌سازی تابع هزینه (۳۳) بر حسب بردار η با صفر شدن گرادیان تابع معیار نسب به η قابل دستیابی است. جایگزین شدن بردار η با بردار قانون کنترل بهینه $\underline{\Delta U}_k$ ، سبب کاهش حجم بهینه‌سازی و افزایش سرعت الگوریتم می‌شود. با حل مساله بهینه‌سازی در هر گام و استخراج بردار η ، بردار قانون کنترل بهینه حاصل می‌شود. این مقدار، معادل میزان تغییر زاویه فراز مورد نیاز برای اصلاح مسیر پرواز نسبت به مسیر نامی موشک و کاهش خطای برخورد آن است. بنابراین داریم:

$$\Delta u_k = \Delta \theta_k = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \underline{\Delta U}_k \quad (34)$$

بنابراین قانون هدایت جدید اصلاح زاویه فراز بر اساس نتیجه کنترل پیش‌بین فوق به صورت زیر محاسبه شده و قابل اعمال است:

$$\theta_{C,k} = \theta_k^* + \Delta \theta_k \quad (35)$$

که θ_k^* مقادیر لحظه‌ای زاویه فراز مسیر نامی از پیش تعیین شده موشک است. این رابطه، فرمان هدایت زاویه فراز مبتنی بر کنترل پیش‌بین است. این فرمان بر اساس اصلاح مورد نیاز زاویه فراز مبتنی بر رفتار آتی تغییرات دینامیک پرواز موشک و مقادیر زاویه فراز نامی محاسبه شده و در هر لحظه از زمان، به موشک اعمال می‌شود.

۶- شبیه‌سازی و تحلیل نتایج

روش جدید هدایت ارایه شده در این مقاله با استفاده از شبیه‌سازی سه درجه آزادی بر روی یک موشک بالستیک برد کوتاه با مشخصات نامی زیر پیاده‌سازی شده است.

$$\begin{aligned} T &= 180 \text{ kN} \quad t_{burn} = 7 \text{ sec} \\ L &= 8 \text{ m} \quad Diameter = 450 \text{ mm} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} I_{SP} &= 230 \text{ sec} \\ m_{Total} &= 1200 \text{ kg} \end{aligned}$$

تعداد توابع لاگر $N=5$ در نظر گرفته شده است. ضرایب آیرودینامیک و سایر مشخصات این موشک نظیر منحنی‌های تغییرات مرکز جرم، ممان‌های اینرسی و تراسست و ... به طور کامل و به صورت جدول ضرایب در شبیه‌سازی مورد استفاده قرار گرفته است. مجموعه S به عنوان مجموعه‌ای از خطاهای در نظر گرفته شده در شبیه‌سازی است که شامل خطاهای تغییرات تراسست ΔT و تغییرات دمای محیط $\Delta Temp$ می‌باشد.

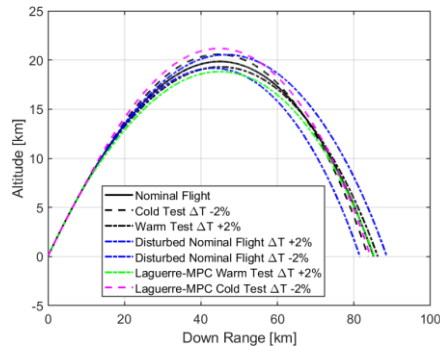
$$S = \Delta T, \Delta Temp \quad (37)$$

مقادیر این مجموعه برای بررسی عملکرد روش نوین هدایت پیشنهادی در جدول ۱ ارایه شده است.

جدول ۱- مقادیر خطای در نظر گرفته در شبیه‌سازی

شرایط خطای اعمالی به موشک	مجموعه S
حالت مسیر نامی	$S_n = \{0, +20^\circ C\}$
تغییرات اغتشاشی مثبت	$S_1 = \{2\%, +60^\circ C\}$
تغییرات اغتشاشی منفی	$S_2 = \{-2\%, -20^\circ C\}$

در شکل ۲، منحنی تغییرات ارتفاع موشک بر حسب مسافت افقی نشان داده شده است. همانگونه که در این شکل مشخص است، خطای برخورد هدایت مبتنی کنترل پیش‌بین، در هر دو آزمایش گرم و سرد موشک، به مراتب کمتر از خطای برخورد هدایت مرسوم دلتا برای اصلاح زاویه فراز است. مقادیر دقیق خطای برخورد برای هر یک از هدایت‌ها در جدول ۲ ارایه شده است.



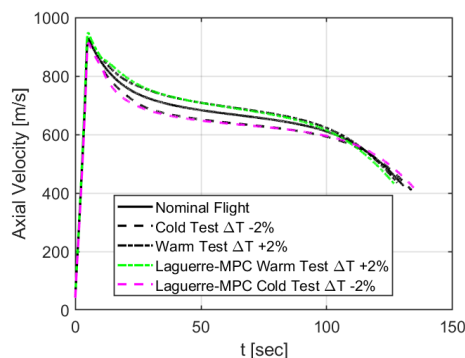
شکل ۲- منحنی ارتفاع برحسب مسافت افقی موشک

جدول ۲- مقادیر خطای برخورد

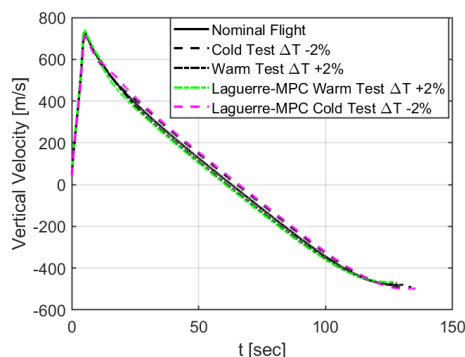
میزان خطا (کیلومتر)	نوع هدایت
۳/۹۳۵	مسیر نامی با خطای ۲ درصدی تراست
۳/۳۳	مسیر نامی با خطای ۲- درصدی تراست
۱/۳۲	هدایت دلتا با خطای ۲ درصدی تراست
۱/۲۸	هدایت دلتا با خطای ۲- درصدی تراست
۰/۲۲۴	هدایت مبتنی بر کنترل پیش‌بین با خطای ۲ درصدی تراست
۰/۴۹۷	هدایت مبتنی بر کنترل پیش‌بین با خطای ۲- درصدی تراست

میزان خطای برخورد ارایه شده در جدول ۱، بیانگر انعطاف‌پذیری بالای روش جدید ارایه شده در این مقاله است که به سادگی امکان کاهش خطای برخورد تا زیر ۵۰۰ متر را میسر می‌سازد. این کار سبب می‌شود که شتاب مورد نیاز در هدایت فاز نهایی به شدت کاسته شده و موشک در فاز نهایی با کمترین انرژی مورد نیاز به هدف اصابت کند.

در شکل ۳، منحنی تغییرات سرعت افقی موشک در هدایت دلتا و هدایت جدید مقاله نشان داده شده است. تغییرات سرعت افقی در هدایت پیش بین متناسب با میزان خطای برخورد و با در نظر گرفتن رفتار فرایند در افق آینده در نظر گرفته شده برای آن است. این تغییرات در منحنی سرعت عمودی موشک در شکل ۴ نیز موید این موضوع است.

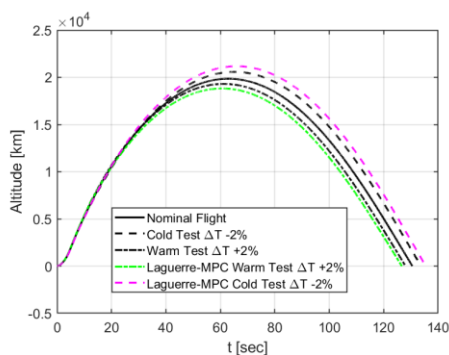


شکل ۳- منحنی سرعت افقی موشک

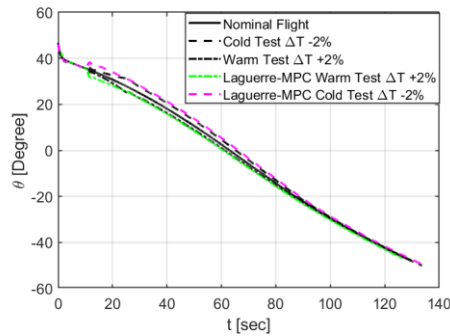


شکل ۴- منحنی سرعت عمودی موشک

در شکل ۵، منحنی تغییرات ارتفاع موشک بر حسب زمان نشان داده شده است. همانگونه که در شکل مشخص شده است، میزان قابلیت تغییر ارتفاع در هدایت نوین این مقاله به مراتب بهتر از روش هدایت مرسوم است.

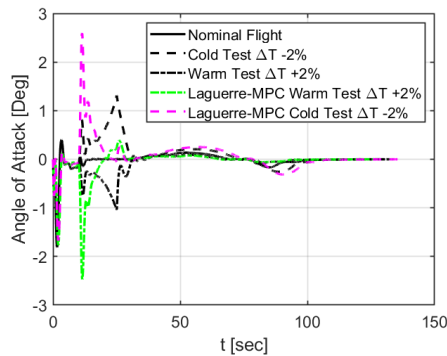


شکل ۵- منحنی زمانی ارتفاع موشک

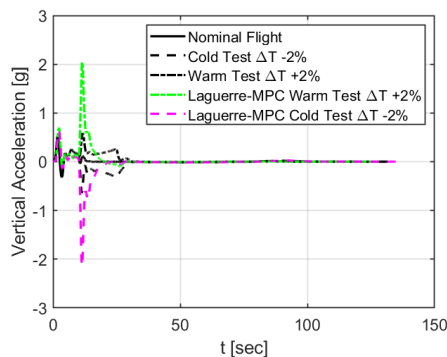


شکل ۶- منحنی تغییرات زاویه فراز موشک در طول پرواز

تغییرات زاویه فراز موشک به عنوان فرامین هدایتی موشک به ازای تغییرات تراست مختلف در شکل ۶ نشان داده شده است. تغییر زاویه فراز موجب تغییر منحنی مسیر پرواز شده و امکان دستیابی به کمترین خطای برخورد را میسر می‌کند. منحنی تغییرات زاویه حمله موشک در شکل ۷ نشان داده شده است. تغییرات زاویه حمله در هدایت نوین این مقاله به مراتب بیشتر از روش هدایتی مرسوم است. این تغییرات نیز دور از تصور نیست. برای دستیابی به ارتفاع و شتابی متناسب به میزان خطای حادث شده، تغییرات بوجود آمده در زاویه حمله ضروری است. نکته مهم این است که چون تغییرات شدید زاویه حمله، در مرحله خاموشی موتور اتفاق می‌افتد، بنابراین مشکل عملی در پی نخواهد داشت.



شکل ۷- منحنی تغییرات زاویه حمله موشک در طول پرواز



شکل ۸- منحنی تغییرات شتاب عمودی موشک در طول پرواز

تغییرات منحنی شتاب موشک که در شکل ۸ نشان داده شده است، موید این موضوع می‌باشد. شتاب مورد نیاز در هدایت نوین ارایه شده بیشتر از هدایت مرسوم دلتا است. این شتاب مخصوصاً در لحظه شروع هدایت نوین، خودنمایی می‌کند. در واقع برای تغییر مسیر متناسب با خطای تراست اعمالی، شتابی مناسب به موشک اعمال می‌شود. چون این شتاب در لحظاتی که فشار دینامیکی مناسب وجود دارد، بنابراین مشکلی در تولید این شتاب بروز نخواهد کرد.

۷- تشکر و قدردانی

به پاس الطاف بی‌دریغ و همت والایتان، صمیمانه‌ترین سپاس‌ها را تقدیم می‌دارم و قدردان بزرگواری و فضل شما هستم.

۸- تعارض منافع

نویسنده(گان) اعلام می‌دارند که در مورد انتشار این مقاله تضاد منافع وجود ندارد. علاوه بر این، موضوعات اخلاقی شامل سرقت ادبی، رضایت آگاهانه، سوء رفتار، جعل داده‌ها، انتشار و ارسال مجدد و مکرر توسط نویسندگان رعایت شده است.

۹- دسترسی آزاد

این نشریه دارای دسترسی باز است و اجازه اشتراک (تکثیر و بازآرایی محتوا به هر شکل) و انطباق (بازترکیب، تغییر شکل و بازسازی بر اساس محتوا) را می‌دهد.

۱۰- نتیجه‌گیری

در این مقاله، هدایت نوینی مبتنی بر کنترل پیش‌بین برای یک موشک بالستیک سوخت جامد با استفاده از توابع متعامد لاگر گسسته ارایه شد. روش پیشنهادی برای کاهش حجم محاسبات الگوریتم هدایت پیش‌بین و بهره‌گیری از دقت بالای اصابت بسیار کارا و موثر است. این هدایت، یک هدایت ضمنی مبتنی بر مسیر نامی است که برای اصلاح زاویه فراز موشک سوخت جامد توسعه یافته است. بهره‌گیری از این روش در سایر موشک‌های مشابه نظیر ماهواره‌برها نیز میسر می‌باشد. دقت اصابت این روش نسبت به روش هدایت مرسوم دلتا مورد بررسی قرار گرفت. خطای برخورد موشک با روش هدایت جدید، به مراتب کمتر از روش مرسوم دلتا است. علاوه بر این، وجود ماتریس‌های بهره در تنظیم ضرایب هدایت، سبب انعطاف‌پذیری این روش شده است. انعطاف‌پذیری این روش، امکان پیاده‌سازی این روش برای مسیرهای از پیش تعیین شده را نیز میسر می‌سازد. چون کارایی و قدرت تقریب توابع لاگر کاملاً به انتخاب درست پارامتر^a بستگی دارد، بنابراین انتخاب نامناسب این پارامتر سبب می‌شود که ورودی کنترل به خوبی توصیف نشود. معمولاً پارامتر^a به صورت تجربی یا با آزمون و خطا انتخاب می‌شود. علاوه بر این، توابع لاگر

در مدل سازی دینامیک هایی با زمان های پاسخ نه خیلی سریع استفاده می شوند؛ برای سیستم هایی با رفتار سریع یا پاسخ های خیلی پیچیده نیاز به مرتبه های بالاتر یا مدل های دیگر است.

۱۱-مراجع

- [1] M. J. Turner, *Rocket and spacecraft propulsion: principles, practice and new developments*. Springer Science & Business Media, ۲۰۰۸.
- [2] S. Mandić, "Guidance of ground to ground rockets using flight path steering method," *Scientific Technical Review*, vol. ۵۹, no. ۳-۴, pp. ۳-۱۱, ۲۰۰۹.
- [۳] S. Mandić, "Dispersion reduction of artillery rockets guided by flight path steering method," *The Aeronautical Journal*, vol. ۱۲۰, no. ۱۲۲۵, pp. ۴۳۵-۴۵۶, ۲۰۱۶.
- [۴] روش جدیدی برای طراحی هدایت غیرحساس به خاموشی موتور.
- [۵] M. Massoumnia, "A New Guidance Method for Surface to Surface Ballistic Missiles without Mandatory Engine Cut-Off," *Journal of Advanced Materials in Engineering (Esteghlal)*, vol. ۱۷, no. ۲, pp. ۱۷۹-۱۸۴, ۱۹۹۸.
- [۶] R. Zardashti and M. Bagherian, "Flight Path Angle Steering with Lambert Guidance Reference," *علوم و فناوری فضایی*, vol. ۲, no. ۴, ۲۰۱۰.
- [۷] Ć. V. Danilo, A. H. Mostafa, and M. D. Slobodan, "A new guidance law for a tactical surface-to-surface missile," *Vojnotehnički glasnik*, vol. ۶۰, no. ۱, pp. ۱۱۵-۱۳۵, ۲۰۱۲.
- [۸] G. Gregoriou, "CEP calculations for a rocket with different control systems," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. ۱۱, no. ۳, pp. ۱۹۳-۱۹۸, ۱۹۸۸.
- [۹] P. Kumar, A. Bhattacharya, and R. Padhi, "MPSP guidance of tactical surface-to-surface missiles with way-point as well as terminal impact and body angle constraints," in *IEEE International Conference on Control Applications (CCA)*, ۲۰۱۳: IEEE, pp. ۸۶۵-۸۷۰.
- [۱۰] H. Sadati, "Guidance and control of flying vehicle by explicit model predictive controller," *Journal of Applied Dynamic Systems and Control*, vol. ۱, no. ۱, p. ۲۵, ۲۰۲۵.

- [۱۱] H. Luo, Z. Liu, T. Jin, C.-H. Lee, and S. He, "Computational Predictor–Corrector Homing Guidance for Constrained Impact," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, pp. ۱–۱۵, ۲۰۲۵.
- [۱۲] Y. Tan, G. Li, J. Lou, R. Mao, Y. Zhang, and P. Wang, "Multi-dimensional robust tracking control integrating input-constrained extended model predictive static programming with receding horizon control strategy," ۲۰۲۴.
- [۱۳] Z. Hu, X. Liang, J. Zhang, X. You, and C. Ma, "Advanced Hierarchical Missile Guidance Strategies Based on Temporal Forecasting and Deep Reinforcement Learning," in ۲۰۲۴ *China Automation Congress (CAC)*, ۲۰۲۴: IEEE, pp. ۶۷۷۷–۶۷۸۳.
- [۱۴] Y. Zhan, S. Li, and D. Zhou, "Information fusion-based three-dimensional two-stage optimal cooperative predictive guidance law," *Aerospace Science and Technology*, vol. ۱۵۵, p. ۱۰۹۵۳۳, ۲۰۲۴.
- [۱۵] A. Tewari, *Atmospheric and space flight dynamics*. Springer, ۲۰۰۷,
- [۱۶] G. M. Siouris, *Missile guidance and control systems*. Springer Science & Business Media, ۲۰۰۶.
- [۱۷] M. Handbook, "Missile Flight Simulation. Part One. Surface-to-Air Missiles," *MILHDBK-۱۲۱۱*, ۱۹۹۵.
- [۱۸] J. Roskam, *Airplane flight dynamics and automatic flight controls*. DARcorporation, ۱۹۹۸.
- [۱۹] C. Bordons and E. Camacho, *Model predictive control*. Springer Verlag London Limited, ۲۰۰۷.
- [۲۰] B. Kouvaritakis and M. Cannon, "Model predictive control," *Switzerland: Springer International Publishing*, vol. ۳۸, pp. ۱۳–۵۶, ۲۰۱۶.